

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Specialistica in Matematica

Sui voli di Lévy

Tesi di Laurea in Fisica Matematica Applicata

Relatore: Chiar.mo Prof.
Marco Lenci

Presentata da:
Stefania Ottaviano

Seconda Sessione
Anno Accademico 2010-2011

Ai miei genitori ...

Introduzione

In questa tesi trattiamo principalmente cammini aleatori sul reticolo \mathbb{Z}^d , tuttavia sono stati riportati anche risultati su cammini in cui le variabili aleatorie coinvolte sono continue. In particolare ci siamo focalizzati sui cosiddetti *voli di Lévy*, ovvero processi di superdiffusione in cui le lunghezze dei ‘passi’ del cammino hanno distribuzioni di probabilità con varianza infinita, che ammettono marcate asimmetrie e ‘code grasse’. Per questo tipo di distribuzione, cioè, può essere molto alta la probabilità che si verifichino eventi estremi e che quindi si abbia una decrescita molto lenta delle distribuzioni dei salti. Tali processi vengono detti ‘voli’ perchè possono verificarsi, con probabilità non trascurabile, dei salti di ampiezza molto elevata, provocando una grande fluttuazione delle variabili; questo è ciò che fondamentale distingue un volo di Lévy, un processo di superdiffusione (o diffusione anomala), da un moto browniano, un cosiddetto processo di diffusione normale, in cui l’ampiezza dei passi è molto più ridotta. Un volo di Lévy ha una struttura frattale.

Un notevole impulso allo studio dei fenomeni di superdiffusione fu dato dall’applicazione, da parte di Mandelbrot (Varsavia, 20 novembre 1924-Cambridge, 14 ottobre 2010), degli studi di Lévy sulle distribuzioni stabili alle fluttuazioni del mercato azionario. Negli ultimi vent’anni l’interesse verso questo tipo di studio è notevolmente aumentato grazie anche alla scoperta di un gran numero di fenomeni complessi in cui i processi di diffusione anomala avvengono spontaneamente, questo aspetto è anche ciò che ha mosso la mia curiosità e mi ha portata alla scelta di tale argomento di tesi. Tra i vari

fenomeni che possono essere descritti da tali tipi di processi citiamo ad esempio la volatilità degli indici finanziari, gli spostamenti umani, la distribuzione degli intervalli fra le scosse di terremoto, la diffusione delle epidemie, dei virus su internet, ed anche il volo degli uccelli in cerca di cibo. Sono stati infatti raccolti numerosi dati riguardo alle posizioni toccate da questi animali nel loro percorso irregolare alla ricerca di cibo e l'andamento registrato è quello tipico di un volo di Lévy. Anche nello studio della dinamica del cuore umano si riscontrano moti irregolari che hanno la struttura tipica di un volo di Lévy, infatti mettendo a confronto sequenze di battiti cardiaci di un individuo sano e di un individuo con scompensi cardiaci, è stato rilevato che il battito di un individuo sano segue un andamento simile a quello di un moto browniano, mentre il battito di un individuo malato è descritto da una legge di potenza riconducibile ad un volo di Lévy.

E' di pochi anni addietro, inoltre, la creazione di un nuovo materiale ottico innovativo che può avere importanti sviluppi in campo industriale, in cui la luce si diffonde in maniera non convenzionale, ovvero i fotoni si diffondono all'interno del mezzo con una velocità media molto maggiore di quella che è possibile nei normali mezzi diffusivi, questo si verifica perchè i centri che diffondono la luce sono distribuiti in maniera quasi frattale. E' proprio per il fatto che la luce si propaga seguendo uno schema tipico dei voli di Lévy che i ricercatori hanno nominato questo nuovo materiale *vetro di Lévy*. Questa scoperta consente una migliore comprensione dei processi fisici di trasporto di luce e suono, del comportamento di particelle come gli elettroni e di altri sistemi complessi che si diffondono seguendo voli di Lévy. Potranno, inoltre, essere utili in futuro per sviluppare rivestimenti con proprietà ottiche avanzate.

La tesi è stata così sviluppata. Nel primo capitolo ci siamo occupati di cammini aleatori discreti con varianza finita, è stato introdotto quindi il concetto di cammino aleatorio e della cosiddetta 'funzione di transizione' che identifica il cammino e che, come ci suggerisce il nome, indica la probabilità che avvenga una certa transizione da un punto all'altro del reticolo \mathbb{Z}^d . Sono

stati poi definiti i concetti di ricorrenza e transienza: se il cammino è transiente, da un certo tempo n in poi, il ‘camminatore’ non torna più al punto di partenza; nel caso il cammino sia ricorrente, invece, torna nel punto di partenza infinite volte. Ci siamo quindi occupati di elencare metodi per classificare i cammini aleatori in base a tale distinzione e a questo scopo sono state definite la funzione $F_n(x, y)$, che rappresenta la probabilità, partendo al tempo 0 dal punto x , che si arrivi a visitare il punto y per la prima volta al tempo n , e la funzione $G_n(x, y)$ che corrisponde al numero atteso di visite di un cammino aleatorio, con punto di partenza x , al punto y entro un tempo n . In queste due prime sezioni sono anche state fatte personali dimostrazioni di alcuni semplici risultati, che i libri consultati non riportavano.

E’ stato poi trattato il concetto di funzione caratteristica e ci siamo occupati di distinguere i cammini periodici da quelli aperiodici e di adattare risultati noti al nostro particolare oggetto di studio che sono stati i cammini aperiodici, per arrivare infine al risultato più importante del capitolo, in cui si danno criteri per la ricorrenza e la transienza dei cammini in base alla dimensione degli stessi. Una frase del Professor Kakutani (Osaka, 28 Agosto 1911-New Haven Connecticut, 17 Agosto 2004-), che riportiamo di seguito, esprime il senso di tale teorema:

‘A drunk man will find his way home, but a drunk bird may get lost forever’.

Cioè: ‘Un uomo ubriaco troverà la strada verso casa, ma un uccello ubriaco potrebbe perderla per sempre’, intendendo dire che un ubriaco camminando torna al punto da cui era partito con probabilità uno (dimensione uno e due), ma un uccello in volo (dimensione tre, ma si considerano anche dimensioni maggiori) da un certo tempo in poi non farà più ritorno a casa, cioè al punto da cui era partito.

Il secondo capitolo riguarda i teoremi del limite che ci descrivono la distribuzione limite di somme, adeguatamente scalate, di un gran numero di variabili aleatorie indipendenti, a cui spesso, come nel nostro caso, si richiede che siano anche identicamente distribuite. Qui continuiamo a trattare variabili

aleatorie a varianza finita. Considerando quindi i cammini, spazialmente omogenei, come una somma di n variabili indipendenti e identicamente distribuite, il teorema del limite centrale ci dice che per n molto grande tale somma scalata si distribuisce come una variabile aleatoria normale standard, indipendentemente dalla distribuzione delle singole variabili.

Il terzo capitolo tratta le distribuzioni stabili, il cui studio ci tornerà utile nel Capitolo 4 dove abbiamo trattato in dettaglio i voli di Lèvy. Tali distribuzioni ammettono asimmetrie e code grasse, quindi una lenta decrescita, dovuta essenzialmente alla possibile divergenza dei loro momenti (ad eccezione della distribuzione gaussiana che fa parte di questa classe). Fu Paul Lévy (Parigi, 15 settembre 1886-Parigi, 15 dicembre 1971) a caratterizzare questo tipo di distribuzioni nei suoi studi riguardanti somme di variabili identicamente distribuite negli anni venti del XX secolo.

Se X_1 e X_2 sono due variabili aleatorie con la stessa distribuzione di probabilità, allora tale distribuzione è stabile se la combinazione lineare di X_1 e X_2 mantiene la stessa distribuzione, a meno di una traslazione e di un riscalamento. Le distribuzioni stabili, inoltre, sono le uniche distribuzioni limite possibili per la somma normalizzata di variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite. In sostanza alcune quantità osservabili, come il prezzo di un'azione, il rumore di un sistema di comunicazione, ecc..., sono la somma di piccole componenti e quindi un modello stabile può essere usato per descrivere questo tipo di sistemi. Purtroppo la mancanza di una rappresentazione analiticamente chiusa per le funzioni di densità di tutte le distribuzioni stabili, eccetto tre (la distribuzione Gaussiana, quella di Cauchy, e la cosiddetta distribuzione di Lévy_{3/2}) ha costituito un limite per l'uso di esse nelle applicazioni. Tuttavia, per tutte le distribuzioni stabili, è definita analiticamente la funzione caratteristica; per ottenere la densità di probabilità dovremmo fare la sua antitrasformata di Fourier che però, a parte i casi sopracitati, rimane sottoforma di integrale non essendo analiticamente risolvibile. La densità può essere calcolata solo con metodi numerici; fortunatamente al giorno d'oggi ci sono programmi per computer in grado di

calcolare densità e funzioni di distribuzione stabili permettendo un maggiore uso di esse in molti problemi pratici.

Nel quarto capitolo ci siamo occupati nello specifico dei voli di Lèvy. Dopo una trattazione generale dell'argomento ci siamo focalizzati su voli di dimensione uno e abbiamo trattato, in questo ambito, il *Teorema del Limite Generalizzato* per variabili con varianza infinita. E' stata inoltre data una personale dimostrazione rispetto a tale teorema, espandendo la dimostrazione del libro di Koralov-Sinai ([2]), che riguardava il caso specifico di distribuzioni simmetriche e continue, a distribuzioni più generali. Il lavoro è stato fatto prima per variabili continue e poi per variabili discrete, essendoci dedicati maggiormente a cammini discreti.

Riferimenti bibliografici

Per il Capitolo 1: [1], [2], [3],[8], [9].

Per il Capitolo 2: [2].

Per il Capitolo 3: [3], [4], [6].

Per il Capitolo 4: [2],[4], [5], [7], [12], [13].

Per l'Appendice: [1], [9].

Indice

Introduzione	i
1 Cammini aleatori con varianza finita	1
1.1 Cammini aleatori sul reticolo \mathbb{Z}^d	1
1.2 Ricorrenza e transienza	6
1.3 Funzione caratteristica	26
2 Teoremi del limite	39
2.1 Teorema del limite centrale	39
2.2 Teorema del limite locale	41
3 Distribuzioni stabili	47
3.1 Definizioni di stabilità	47
3.2 Parametri	48
3.3 Probabilità delle code e momenti	53
4 Cammini aleatori con varianza infinita	55
4.1 Voli di Lévy	55
4.2 Distribuzioni limite	58
4.3 Teorema del limite generalizzato	59
A Cenni di teoria della misura	85
Bibliografia	89

Ringraziamenti

90

Elenco delle figure

3.1	Grafici delle densità di una normale standard $N(0, 1)$, di Cauchy(1,0) e di Lévy _{3/2} (1,0).	52
4.1	Un tipico volo di Lévy bi-dimensionale. In questo volo di Lévy la direzione dei passi è isotropa.	56

Capitolo 1

Cammini aleatori con varianza finita

1.1 Cammini aleatori sul reticolo \mathbb{Z}^d

In questa sezione ci occuperemo di cammini aleatori sul reticolo \mathbb{Z}^d .

Definizione 1.1. Il reticolo \mathbb{Z}^d , che chiameremo in seguito R , è l'insieme ordinato dei punti $x = (x^1, x^2, \dots, x^d)$, dove gli x^i sono interi e $1 \leq i \leq d$. R è detto *spazio degli stati* del cammino aleatorio.

Consideriamo per ogni coppia di punti x e y in R il numero reale $P(x, y)$.

Definizione 1.2. La funzione $P(x, y)$ è detta *funzione di transizione* e rappresenta la probabilità di andare dal punto x al punto y del reticolo R , quindi, come ci suggerisce il nome, la probabilità della transizione $x \rightarrow y$. Si richiede che $P(x, y)$ abbia le seguenti proprietà:

$$0 \leq P(x, y) = P(0, y - x), \quad (1.1)$$

$$\sum_{x \in R} P(0, x) = 1. \quad (1.2)$$

La proprietà (1.2) ci dice che $(P(x, y))_{x, y \in R}$ è una matrice stocastica. La proprietà (1.1) è detta di *spaziale omogeneità* e ci dice, essendo appunto $y - x$

un qualunque punto di R , che si può determinare la funzione di transizione attraverso una singola funzione $p(x) = P(0, x)$ su R con le proprietà

$$p(x) \geq 0, \quad \sum_{x \in R} p(x) = 1$$

Abbiamo quindi definito una misura di probabilità ¹ $p(x)$ su R che specifica il cammino aleatorio.

In definitiva possiamo quindi dire che *un cammino aleatorio omogeneo è identificato da una funzione di transizione $P(x, y)$, che possiede le proprietà (1.1) e (1.2), e che è definita per tutte le coppie x, y dello spazio degli stati R .*

Definizione 1.3. Per ogni x, y in R ,

$$P_0(x, y) = \delta(x, y), \quad (1.3)$$

dove δ è la delta di Kronecker.

$$P_1(x, y) = P(x, y), \quad (1.4)$$

$$P_n(x, y) = \sum_{\substack{x_i \in R \\ i=1, \dots, n-1}} P(x, x_1)P(x_1, x_2) \dots P(x_{n-1}, y), \quad n \geq 2 \quad (1.5)$$

Vedremo nella proposizione successiva che $P_n(x, y)$ è ancora una funzione di transizione.

Chiaramente $P_n(x, y)$ rappresenta la probabilità di trovarsi, durante il nostro cammino aleatorio, in un punto y al tempo n , essendo partiti al tempo $t = 0$ dal punto x . Se chiamiamo ‘passo’ una transizione elementare del

¹Per un approfondimento sulla teoria della misura si veda Appendice A.

cammino aleatorio, $P_n(x, y)$ è la probabilità di trovarsi nel punto y dopo n passi, partendo da x .

Basandoci sulla definizione 1.3, otteniamo la seguente proposizione

Proposizione 1.1. Per ogni x, y in R ,

$$P_{n+m}(x, y) = \sum_{t \in R} P_n(x, t) P_m(t, y) \quad n \geq 0, m \geq 0, \quad (1.6)$$

$$\sum_{y \in R} P_n(x, y) = 1, \quad (1.7)$$

$$P_n(x, y) = P_n(0, y - x) \quad n \geq 0. \quad (1.8)$$

Dimostrazione. Per dimostrare il risultato (1.6) basta utilizzare la definizione 1.3, infatti

$$P_{n+m}(x, y) =$$

$$\sum_{t \in R} \sum_{\substack{x_i \in R \\ i=1, \dots, n-1, n+1, \dots, n+m-1}} P(x, x_1) P(x_1, x_2) \dots P(x_{n-1}, t) P(t, x_{n+1}) \dots P(x_{n+m-1}, y). \quad (1.9)$$

Se consideriamo un cammino aleatorio che passa, partendo da t , per i punti del seguente insieme

$$\{(t, x_{n+1}), \dots, (x_{n+m-1}, y)\},$$

possiamo dire che al tempo $\tau = 0$ ci troviamo in t , al tempo $\tau = 1$ ci troviamo in $x_{n+1} = z_1, \dots$, al tempo $\tau = m-1$ ci troviamo in $x_{n+m-1} = z_{m-1}$ e al tempo $\tau = m$ ci troviamo in y , allora l'equazione (1.9) diventa

$$P_{n+m}(x, y) =$$

$$\sum_{t \in R} \left[\sum_{\substack{x_i \in R \\ i=1, \dots, n-1}} P(x, x_1) P(x_1, x_2) \dots P(x_{n-1}, t) \sum_{\substack{z_j \in R \\ j=1, \dots, m-1}} P(t, z_1) \dots P(z_{m-1}, y) \right] =$$

$$\sum_{t \in R} P_n(x, t) P_m(t, y).$$

Per il risultato (1.7), sfruttando le proprietà (1.1) e (1.2), possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \sum_{y \in R} P_n(x, y) &= \sum_{\substack{x_i \in R \\ i=1, 2, \dots, n-1}} P(x, x_1) \dots P(x_{n-2}, x_{n-1}) \sum_{y \in R} P(x_{n-1}, y) = \\ &= \sum_{\substack{x_i \in R \\ i=1, \dots, n-2}} P(x, x_1) \dots P(x_{n-3}, x_{n-2}) \sum_{x_{n-1} \in R} P(x_{n-2}, x_{n-1}) \cdot 1 = \\ &\dots = \sum_{x_1 \in R} P(x, x_1) \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Proviamo il risultato (1.8). Considerando l'equazione (1.5) di $P_n(x, y)$ e sommando sui punti x_i traslati di una quantità pari a x , otteniamo

$$P_n(0, y - x) = \sum_{\substack{\{x_i - x\} \in R \\ i=1, \dots, n-1}} P(0, x_1 - x) P(x_1 - x, x_2 - x) \dots P(x_{n-1} - x, y - x). \quad (1.10)$$

Ora sfruttando la proprietà di spaziale omogeneità possiamo scrivere

$$\begin{array}{lll} P(0, x_1 - x) = & & P(x, x_1) \\ P(x_1 - x, x_2 - x) = & P(0, x_2 - x + x - x_1) = & P(x_1, x_2) \\ \vdots & & \vdots \\ P(x_{n-1} - x, y - x) = & P(0, y - x + x - x_{n-1}) = & P(x_{n-1}, y) \end{array}$$

Per cui, riprendendo l'equazione (1.10), e utilizzando le uguaglianze precedenti, otteniamo

$$\begin{aligned} P_n(0, y - x) &= \sum_{\substack{\{x_i - x\} \in R \\ i=1, \dots, n-1}} P(0, x_1 - x) P(x_1 - x, x_2 - x) \dots P(x_{n-1} - x, y - x) = \\ &= \sum_{\substack{\{x_i - x\} \in R \\ i=1, \dots, n-1}} P(x, x_1) P(x_1, x_2) \dots P(x_{n-1}, y) = P_n(x, y) \end{aligned}$$

□

Definiamo ora l'insieme degli 'eventi elementari'

Definizione 1.4. L'insieme degli *eventi elementari* è l'insieme delle successioni $\omega = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$, dove $x_0 = x$ e x_1, x_2, \dots, x_n possono assumere qualunque valore in R . Denotiamo l'insieme di tali successioni Ω_n , questo insieme è numerabile, poichè lo è R .

Definizione 1.5. La funzione $i \mapsto x_i$, $0 \leq i \leq n$ ($0 \leq i < \infty$ se $n = \infty$) è detta *traiettoria del cammino aleatorio*. Se quindi $\omega = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ è la traiettoria del cammino aleatorio, allora i vettori aleatori $\xi_1 = x_1 - x_0, \dots, \xi_n = x_n - x_{n-1}$, sono detti *incrementi* del cammino.

Ad ogni ω in Ω_n associamo la misura

$$p(\omega) = P(x, x_1) P(x_1, x_2) \dots P(x_{n-1}, x_n).$$

Segue dalla definizione 1.3 e dalla proposizione 1.1 che

$$\sum_{[\omega | \omega \in \Omega_n; x_0 = x, x_n = y]} p(\omega) = P_n(x, y), \quad \sum_{\omega \in \Omega_n} p(\omega) = \sum_{y \in R} P_n(x, y) = 1.$$

Definiamo ora i *momenti* di un cammino aleatorio.

Definizione 1.6.

- *momento assoluto k-esimo*:

$$m_k = \sum_{x \in R} |x|^k P(0, x) \leq \infty, \quad k \geq 1,$$

in caso $m_k < \infty$, definiamo il

- *momento k-esimo*

$$\mu_k = \sum_{x \in R} x^k P(0, x) \quad k \geq 1$$

- $m = m_1$,

- $\mu = \mu_1$ è la *media* o *valore atteso* della posizione,

- $\sigma^2 = \mu_2 - \mu^2$ è la *varianza*,

1.2 Ricorrenza e transienza

Una delle classificazioni più importanti per un cammino aleatorio riguarda la sua *ricorrenza* o *transienza*, ovvero quella di considerare la probabilità

$P_n(0, 0)$, di tornare, dopo un certo tempo n , al punto di partenza. Nel caso della transienza i cammini aleatori si comportano in modo tale che da un certo tempo n in poi non tornano più al punto di partenza, nel caso di cammini aleatori ricorrenti, invece, essi tornano al punto di partenza infinite volte.

A questo scopo definiamo due nuove funzioni $F_n(x, y)$ e $G_n(x, y)$. Consideriamo dapprima $F_n(x, y)$ e successivamente ci occuperemo di $G_n(x, y)$.

La funzione $F_n(x, y)$ rappresenta la probabilità, partendo al tempo 0 dal punto x , che si arrivi a visitare il punto y per la *prima volta* al tempo n . Quindi, mentre $P_n(x, y)$ rappresenta la probabilità di essere in y al tempo n , non escludendo, comunque, la possibilità di esserci già stati in un tempo precedente, $F_n(x, y)$, invece, è la probabilità di trovarsi in y al tempo n per la prima volta, senza esserci già passati prima.

Definizione 1.7. Per ogni x, y in R , definiamo

$$F_0(x, y) = 0, \quad F_1(x, y) = P(x, y), \quad (1.11)$$

$$F_n(x, y) = \sum_{\substack{x_i \in R \setminus \{y\} \\ i=1,2,\dots,n-1}} P(x, x_1)P(x_1, x_2)\dots P(x_{n-1}, y), \quad n \geq 2. \quad (1.12)$$

Proposizione 1.2. Per ogni x, y in R e per $n \geq 1$, valgono le seguenti proprietà:

$$F_n(x, y) = F_n(0, y - x), \quad (1.13)$$

$$\sum_{k=1}^n F_k(x, y) \leq 1, \quad (1.14)$$

$$P_n(x, y) = \sum_{k=1}^n F_k(x, y)P_{n-k}(y, y). \quad (1.15)$$

Dimostrazione. La proprietà (1.13) deriva immediatamente dalla definizione 1.7, usando la proprietà (1.1) di omogenità spaziale di $P_n(x, y)$. Infatti, per $n = 1$,

$$F_1(x, y) = P_1(x, y) = P_1(0, y - x) = F_1(0, y - x),$$

e per $n \geq 2$

$$F_n(x, y) = \sum_{\substack{x_i \in R \setminus \{y\} \\ i=1,2,\dots,n-1}} P(x, x_1)P(x_1, x_2)\dots P(x_{n-1}, y)$$

$$= \sum_{\substack{x_i - x \in R \setminus \{y-x\} \\ i=1,2,\dots,n-1}} P(0, x_1 - x)P(x_1 - x, x_2 - x)\dots P(x_{n-1} - x, y - x) = F_n(0, y - x).$$

Per la proprietà (1.14) osserviamo innanzitutto che $\sum_{k=1,\dots,n} F_k(x, y) \leq 1$ rappresenta la probabilità che, partendo dal punto x , la prima visita in y avvenga prima o al tempo n ; ora se

$$A_k = \{\omega | \omega \in \Omega_n; x_1 \neq y, x_2 \neq y, \dots, x_{k-1} \neq y, x_k = y\}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

allora gli insiemi A_k sono sottoinsiemi disgiunti di Ω_n e per la definizione 1.7, possiamo dire

$$F_k(x, y) = \sum_{\omega \in A_k} p(\omega), \quad 1 \leq k \leq n.$$

Essendo gli A_k disgiunti, si ottiene

$$\sum_{k=1}^n F_k(x, y) \leq \sum_{\omega \in \Omega_n} p(\omega) = 1.$$

Dimostriamo la proprietà (1.15) per induzione. Supponiamo che tale proprietà valga per $n = j$. Usando la proposizione 1.1 e l'ipotesi di induzione, possiamo scrivere

$$P_{j+1}(x, y) = \sum_{t \in R} P(x, t)P_j(t, y) = \sum_{t \in R} P(x, t) \sum_{k=1}^j F_k(t, y)P_{j-k}(y, y).$$

Per la definizione 1.7, si ha

$$\sum_{t \in R} P(x, t) F_k(t, y) = \sum_{t \in R \setminus \{y\}} P(x, t) F_k(t, y) + P(x, y) F_k(y, y) = F_{k+1}(x, y) + P(x, y) F_k(y, y).$$

Segue, usando nuovamente l'ipotesi di induzione, che

$$P_{j+1}(x, y) = \sum_{k=1}^j F_{k+1}(x, y) P_{j-k}(y, y) + \sum_{k=1}^j P(x, y) F_k(y, y) P_{j-k}(y, y), \quad (1.16)$$

poichè per la proprietà (1.11), $P(x, y) = F_1(x, y)$ e per l'ipotesi d'induzione vale $P_j(y, y) = \sum_{k=1}^j F_k(y, y) P_{j-k}(y, y)$, la (1.16) sarà uguale a

$$\sum_{m=2}^{j+1} F_m(x, y) P_{j+1-m}(y, y) + F_1(x, y) P_j(y, y) = \sum_{m=1}^{j+1} F_m(x, y) P_{j+1-m}(y, y)$$

Questo completa la dimostrazione poichè la proprietà (1.12) è evidentemente corretta quando $n = 1$. \square

A questo punto definiamo la funzione $G_n(x, y)$ che corrisponde al numero atteso di visite di un cammino aleatorio, con punto di partenza x , al punto y entro un tempo n .

Definizione 1.8.

$$G_n(x, y) = \sum_{k=0}^n P_k(x, y), \quad n = 0, 1, \dots \quad x, y \in R. \quad (1.17)$$

Proposizione 1.3.

$$G_n(x, y) \leq G_n(0, 0) \quad n \geq 0 \quad e \quad \forall x, y \in R. \quad (1.18)$$

Dimostrazione. Poichè $G_n(x, y) = G_n(x - y, 0)$ per la proposizione 1.1, è sufficiente dimostrare la disuguaglianza nel caso $y = 0$ e $x \neq 0$. Usando la proprietà (1.12) della Proposizione 1.2 abbiamo

$$G_n(x, 0) = \sum_{k=1}^n P_k(x, 0) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^k F_{k-j}(x, 0) P_j(0, 0),$$

un cambio nell'ordine delle sommatorie ci da

$$G_n(x, 0) = \sum_{j=0}^n P_j(0, 0) \sum_{i=0}^{n-j} F_i(x, 0).$$

Considerando la proprietà (1.14) della proposizione 1.2, possiamo scrivere

$$G_n(x, 0) \leq \sum_{j=0}^n P_j(0, 0) = G_n(0, 0).$$

□

Arriviamo ora finalmente ad introdurre dei criteri per stabilire se i cammini sono transienti o ricorrenti. Consideriamo a questo scopo la somma $\sum_{k=1}^n F_k(0, 0)$, essa rappresenta la probabilità di tornare al punto di partenza prima o al tempo n . La successione delle somme $\sum_{k=1}^n F_k(0, 0)$ è non decrescente e per la proposizione 1.2 è limitata da uno, quindi tale successione ha un limite che chiamiamo F , tale che $F \leq 1$. Possiamo allora ragionevolmente classificare i cammini aleatori in base al valore di F , come segue

Definizione 1.9. Un cammino aleatorio definito dalla funzione di transizione P è detto *ricorrente* se $F = 1$ e *transiente* se $F < 1$.

Possiamo prendere in considerazione anche la successione monotona delle $G_n(0, 0)$ per classificare i cammini aleatori, considerando il limite di tale successione, che chiamiamo G . Il numero G può essere sia finito che infinito; nella proposizione 1.4 vedremo la relazione tra F e G .

Prima però introduciamo una serie di notazioni

Definizione 1.10.

$$G(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x, y) \leq \infty;$$

$$G_n(0, 0) = G_n, \quad G(0, 0) = G;$$

$$F(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x, y) \leq 1,$$

$$F_n(0, 0) = F_n, \quad F(0, 0) = F.$$

Proposizione 1.4. $G = \frac{1}{1-F}$, con l'interpretazione che $G = +\infty$ quando $F = 1$ e $F = 1$ quando $G = +\infty$. Quindi ovviamente $G < \infty$ quando $F < 1$ e viceversa.

Dimostrazione. Consideriamo la funzione di convoluzione

$$P_n(0, 0) = \sum_{k=0}^n F_k P_{n-k}(0, 0) \quad n \geq 1. \quad (1.19)$$

Facendo la sommatoria su $n = 1, 2, \dots, m$ dell'equazione (1.19) e aggiungendo $P_0(0, 0) = 1$ ad entrambi i membri, si ha

$$G_m = \sum_{k=0}^m F_k G_{m-k} + 1, \quad m \geq 1. \quad (1.20)$$

Per $m \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} G &= 1 + \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m F_k G_{m-k} = 1 + \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m G_k F_{m-k} \geq \\ &\geq 1 + \liminf_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m G_k F_{m-k} = 1 + \liminf_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} G_k F_{m-k} + \liminf_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=N}^m G_k F_{m-k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq 1 + \liminf_{m \rightarrow \infty} G_N \sum_{k=N}^m F_{m-k} = 1 + \liminf_{m \rightarrow \infty} G_N \sum_{j=0}^{m-N} F_j = \\
&1 + G_N \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{m-N} F_j = 1 + G_N F
\end{aligned}$$

$\forall N$ intero, per cui

$$G \geq 1 + GF. \quad (1.21)$$

Questo prova che $G = +\infty$ quando $F = 1$, poichè la disuguaglianza $G \geq 1+G$ non ha soluzioni finite.

D'altra parte l'equazione (1.20) ci da

$$1 = G_m - \sum_{k=0}^m G_k F_{m-k} \geq G_m - G_m \sum_{k=0}^m F_{m-k} \geq G_m(1 - F),$$

si ha quindi

$$1 \geq G(1 - F), \quad (1.22)$$

da cui segue che $G < \infty$ quando $F < 1$. Considerando la (1.21) e la (1.22) possiamo concludere che

$$G(1 - F) = 1.$$

□

Proposizione 1.5.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n(x, y)}{G_n(0, 0)} = F(x, y) \quad \text{quando } x \neq y$$

Nel caso in cui $x = y$, tale uguaglianza non vale per cammini aleatori transienti.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che è sufficiente provare la proposizione nel caso particolare $y = 0$. Usiamo così la proprietà (1.15) della proposizione 1.2 nella forma

$$G_n(x, 0) = \delta(x, 0) + \sum_{k=1}^n P_k(x, 0) = \delta(x, 0) + \sum_{j=0}^n P_j(0, 0) \sum_{k=1}^{n-j} F_k(x, 0),$$

così

$$\frac{G_n(x, 0)}{G_n(0, 0)} = \frac{\delta(x, 0)}{\sum_{j=0}^n P_j(0, 0)} + \frac{\sum_{j=0}^n P_j(0, 0) \sum_{k=0}^{n-j} F_k(x, 0)}{\sum_{j=0}^n P_j(0, 0)} \quad x \in R.$$

Nel caso transiente i denominatori hanno un limite finito G , così si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n(x, 0)}{G_n(0, 0)} = \frac{\delta(x, 0)}{G} + F(x, 0)$$

per ogni $x \in R$, in particolare il limite è $F(x, 0)$ quando $x \neq 0$.

Per quanto riguarda il caso ricorrente, invece, poniamo

$$a_n = \sum_{k=0}^n F_k(x, 0), \quad b_n = P_n(0, 0), \quad n \geq 0$$

Il problema ora è quindi mostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=0}^n b_j a_{n-j}}{\sum_{k=0}^n b_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = F(x, 0).$$

Per ogni intero positivo N possiamo effettuare la seguente decomposizione:

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{j=0}^n b_j a_{n-j}}{\sum_{k=0}^n b_k} - \alpha &= \frac{\sum_{j=0}^{n-N} b_j (a_{n-j} - \alpha)}{\sum_{k=0}^n b_k} + \\ &\quad \frac{\sum_{j=n-N+1}^n b_j a_{n-j}}{\sum_{k=0}^n b_k} - \alpha \frac{\sum_{j=n-N+1}^n b_j}{\sum_{k=0}^n b_k}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Questa decomposizione è valida $\forall n > N$ e $\forall \alpha$ reale, possiamo, quindi, lecitamente porre $\alpha = F(x, 0)$. Poichè b_n è una successione limitata tale che la serie $\sum b_n$ diverge (poichè $\sum b_n = G = +\infty$ per cammini aleatori ricorrenti), si ha che gli ultimi due termini di (1.23) tendono a zero per $n \rightarrow \infty$, per ogni N fissato. Possiamo scegliere $N = N(\epsilon)$ tale che $|a_n - \alpha| < \epsilon$ per $n > N$. Con questa scelta si ottiene

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sum_{j=0}^n b_j a_{n-j}}{\sum_{k=0}^n b_k} - F(x, 0) \right| \leq \epsilon$$

e poichè ϵ è un numero positivo arbitrario, la dimostrazione è completa. \square

Definiamo ora tre sottoinsiemi di R .

Definizione 1.11. Sia dato un cammino aleatorio, ovvero una funzione di transizione $P(x, y)$, definiamo per ogni x, y in R :

$$\Sigma = \{x \mid P(0, x) > 0\}, \quad (1.24)$$

$$R^+ = \{x \mid P_n(0, x) > 0, \quad n \geq 0\}, \quad (1.25)$$

$$\bar{R} = \{x \mid x = y - z, \quad y \in R^+ \text{ e } z \in R^+\}. \quad (1.26)$$

Vediamo, a questo proposito, un caso (l'esempio (1.1) che mostreremo di seguito) in cui il cammino aleatorio si sviluppa su un sottoinsieme di R , ovvero un esempio in cui non sono raggiunti tutti i punti di R : sarà quindi $R^+ \subset R$. Ci serviremo in questo esempio di un cammino aleatorio cosiddetto semplice; vediamo quindi prima com'è fatta la funzione di transizione di un simile cammino aleatorio.

Sia R lo spazio degli stati di dimensione d , e sia

$$|x| = \left[\sum_{i=1}^d (x^i)^2 \right]^{1/2}$$

la distanza euclidea del punto x dall'origine. Allora la funzione di transizione $P(0, x)$ definisce un *cammino aleatorio semplice d -dimensionale* se

$$P(0, x) = \begin{cases} \frac{1}{2d} & \text{se } |x| = 1, \\ 0 & \text{se } |x| \neq 1. \end{cases}$$

Esempio 1.1. Sia dato uno spazio degli stati R di $\dim d \geq 1$ e un punto $x_0 \in R$, consideriamo il seguente cammino aleatorio

$$\begin{aligned} P(0, 2x_0) &= P(0, -2x_0) = 1/2, \\ P(0, x) &= 0 \quad \text{per ogni altro } x \in R. \end{aligned}$$

Questo cammino è un caso di cammino *simmetrico*² semplice di dimensione uno, non ci interessa quale sia la dimensione di R . Esso si sviluppa su di un sottoinsieme di R che non contiene x_0 , quindi si ha $R^+ \subset R$

Osservazione 1.1. Il cammino aleatorio dell'esempio precedente è ricorrente, cioè $G(0, 0) = \infty$, mentre evidentemente $G(0, x_0) = 0$. Questo ci dice che il fatto che il cammino aleatorio sia ricorrente non implica necessariamente $G(0, x) = +\infty \forall x \in R$, potrà quindi esistere, come nel nostro esempio, un $x_0 \in R$ tale che $G(0, x_0) < \infty$. Un altro esempio banale è quello per cui $P(0, 0) = 1$; esso è ricorrente, infatti $G_n(0, 0) = n + 1 \rightarrow \infty$ per $n \rightarrow \infty$, ma chiaramente $G(0, x) = 0 \forall x \neq 0$. Nel caso transiente ($G(0, 0) < \infty$), invece, poichè $G(0, x) \leq G(0, 0) \leq \infty$ per ogni x , si ha chiaramente $G(0, x) < \infty$ per ogni x .

²Un cammino aleatorio è detto *simmetrico* se $P(0, Ke_i)$ dipende da $K \in \mathbb{N}$, ma non da $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

Proposizione 1.6. R^+ è l'insieme di tutte le somme finite di elementi di Σ , includendo l'origine 0. E' anche il più piccolo semigruppato che contiene Σ . \bar{R} d'altra parte è il più piccolo sottogruppo additivo di R che contiene R^+ .

Dimostrazione. Bisogna solo far vedere che sono verificati gli assiomi di semigruppato³. L'origine è in R^+ per definizione. Se $x \in R^+$ e $x \neq 0$, allora da $P_n(0, x) > 0$ segue che c'è una successione finita x_1, x_2, \dots, x_{n-1} in R tale che

$$P_n(0, x) \geq P(0, x_1)P(x_1, x_2), \dots, P(x_{n-1}, x_n) > 0.$$

Ma $P(0, x_1) > 0$, $P(0, x_2 - x_1) > 0$ e così via, così possiamo affermare che $x_1, x_2 - x_1$, ecc. sono in Σ . Quindi $x = x_1 + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1})$, è una rappresentazione di x come somma finita di elementi di Σ . Viceversa, se $x = y_1 + y_2 + \dots + y_n$, con $y_i \in \Sigma$ per $i = 1, \dots, n$, allora

$$P(0, y_k) = P(y_1 + \dots + y_{k-1}, y_1 + \dots + y_k) > 0,$$

per $k = 1, 2, \dots, n$; così si ha

$$P_n(0, x) = P_n(0, y_1 + \dots + y_n) \geq P(0, y_1)P(y_1, y_1 + y_2) \dots P(y_1 + \dots + y_{n-1}, x) > 0,$$

quindi $x \in R^+$. Questo prova che R^+ è l'insieme di tutte le somme finite di elementi di Σ .

Se usiamo ora sia la rappresentazione di R^+ appena ottenuta, sia quella nella definizione 1.11 si vede che R^+ è chiuso rispetto all'operazione di addizione. Quindi R^+ è un semigruppato. Non ci sono semigruppato più piccoli che contengono Σ , poichè ogni semigruppato deve contenere tutte le somme finite di elementi di Σ , e abbiamo appena visto che già R^+ è l'insieme siffatto.

³Un semigruppato è un insieme munito di un'operazione binaria associativa. Ovvero un semigruppato è una struttura algebrica formata dalla coppia $(A, *)$ con A insieme e $*$ funzione definita su $A \times A$ a valori in A tale che:

$$a * (b * c) = (a * b) * c, \quad \forall a, b, c \in A.$$

Sebbene abbia un'identità (l'origine), nessun'altro elemento ha l'inverso.

\bar{R} è un gruppo perchè è chiuso sotto l'operazione di sottrazione, per come è stato definito in 1.11; contiene R^+ sempre per definizione e non possono esserci gruppi più piccoli di \bar{R} con queste due proprietà.

□

Definizione 1.12. Un cammino aleatorio $P(x, y)$ definito su R è *aperiodico* se $R = \bar{R}$. Altrimenti il cammino aleatorio è detto *periodico*.

Osservazione 1.2. Nel caso aperiodico, la dimensione d del cammino è uguale a quella del reticolo R .

E' sempre possibile ridurre i problemi in cui $R \neq \bar{R}$ con R reticolo di dimensione d , ad un caso aperiodico, poichè \bar{R} può essere sempre considerato un gruppo isomorfo al reticolo R_k dove $0 \leq k \leq d$. Quindi restringendo la dimensione del reticolo, il nostro cammino aleatorio diventa aperiodico.

Definizione 1.13. Un cammino aleatorio con funzione di transizione $P(x, y)$ su R è detto *fortemente aperiodico* se ha la proprietà che $\forall x \in R$, il più piccolo sottogruppo di R che contiene l'insieme

$$x + \Sigma = \{y \mid y = x + z, \text{ dove } P(0, z) > 0\} \quad (1.27)$$

è R stesso.

Proposizione 1.7. Per un arbitrario cammino aleatorio, $x, y \in R$ e $n \geq 0$

$$(a) \quad \sum_{t \in R} P(x, t) G_n(t, y) = G_{n+1}(x, y) - \delta(x, y),$$

e per cammini aleatori ricorrenti

$$(b) \quad \sum_{t \in R} P(x, t) F(t, y) = F(x, y).$$

Dimostrazione. La parte (a) segue dalla proposizione 1.1 e dalla definizione 1.8 poichè

$$\sum_{t \in R} P(x, t) G_n(t, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{t \in R} P(x, t) P_k(t, y) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} P_k(x, y) = G_{n+1}(x, y) - \delta(x, y).$$

Dividendo ora l'equazione (a) per $G_n(0, 0)$ (che è positivo), si ottiene

$$\sum_{t \in R} P(x, t) \frac{G_n(t, y)}{G_n(0, 0)} = \frac{G_{n+1}(x, y) - \delta(x, y)}{G_n(0, 0)} = \frac{G_n(x, y)}{G_n(0, 0)} + \frac{P_{n+1}(x, y)}{G_n(0, 0)} - \frac{\delta(x, y)}{G_n(0, 0)}, \quad (1.28)$$

poichè $G_{n+1}(x, y) = \sum_{k=0}^{n+1} P_k(x, y) = \sum_{k=0}^n P_k(x, y) + P_{n+1}(x, y) = G_n(x, y) + P_{n+1}(x, y)$,

Ora facciamo tendere $n \rightarrow \infty$ in (1.28). Poichè $G_n(0, 0) \rightarrow G = \infty$, gli ultimi due termini a destra dell'uguaglianza tendono a zero; osserviamo che, per le proposizioni 1.3 e 1.5, si ottiene

$$0 \leq \frac{G_n(x, y)}{G_n(0, 0)} \leq 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n(x, y)}{G_n(0, 0)} = F(x, y).$$

La limitatezza del rapporto $G_n(x, y)/G_n(0, 0)$ ci permette di usare l'equivalente discreto del teorema della convergenza dominata, per cui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t \in R} P(x, t) \frac{G_n(t, y)}{G_n(0, 0)} = \sum_{t \in R} P(x, t) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n(t, y)}{G_n(0, 0)}.$$

Facendo quindi tendere n all'infinito in (1.28), si può concludere che anche la parte (b) è dimostrata. \square

Proposizione 1.8. Se un cammino aleatorio è ricorrente e $x \in R^+$, allora anche $-x \in R^+$. Inoltre $R^+ = \bar{R}$ e

$$\begin{aligned} F(0, x) &= 1 \quad \forall x \in \bar{R}, \\ F(0, x) &= 0 \quad \forall x \in R \setminus \bar{R}. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Consideriamo in questa dimostrazione un caso particolare della parte (b) della proposizione 1.7

$$\sum_{t \in R} P(x, t) F(t, 0) = F(x, 0), \quad x \in R$$

Segue che

$$\sum_{t \in R} P_2(x, t) F(t, 0) = \sum_{t \in R} P(x, t) F(t, 0),$$

continuando a iterare la funzione di transizione $P(x, y)$ si ha

$$\sum_{t \in R} P_m(x, t) F(t, 0) = F(x, 0), \quad m \geq 0, \quad x \in R. \quad (1.29)$$

Ora prendiamo un $x_0 \in R^+$ fissato e proviamo che $F(x_0, 0) = 1$. Poniamo $x = 0$ nell'equazione (1.29), otteniamo

$$\sum_{t \in R} P_m(0, t) F(t, 0) = F(0, 0) = F = 1.$$

Poichè $x_0 \in R^+$, scegliamo $m_0 \geq 0$ tale che $P_{m_0}(0, x_0) > 0$, allora

$$1 = P_{m_0}(0, x_0) F(x_0, 0) + \sum_{t \neq x_0} P_{m_0}(0, t) F(t, 0)$$

$$\leq P_{m_0}(0, x_0) F(x_0, 0) + \sum_{t \neq x_0} P_{m_0}(0, t)$$

$$= 1 + P_{m_0}(0, x_0) [F(x_0, 0) - 1],$$

il che prova che $F(x_0, 0) = 1$. Inoltre

$$1 = F(x_0, 0) = F(0, -x_0),$$

e $F(0, -x_0)$ sarà zero se $-x_0$ non è in R^+ . Quindi $-x_0$ è in R^+ insieme ad x_0 , così $R^+ = \bar{R}$. Ma come abbiamo mostrato prima $F(0, x_0) = 1$, ed è chiaro che $F(0, x) = 0$ quando $x \in R \setminus \bar{R}$.

□

Proposizione 1.9. Per un cammino aleatorio aperiodico ricorrente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n(0, x)}{G_n(0, 0)} = 1, \quad x \in R$$

Dimostrazione. Per la proposizione 1.5 il limite è $F(0, x)$. Ma per la proposizione 1.8 $F(0, x) = 1 \quad \forall x \in R^+ = \bar{R}$, e poichè il cammino aleatorio è aperiodico, quindi $\bar{R} = R$, abbiamo $F(0, x) = 1 \quad \forall x \in R$. \square

Osservazione 1.3.

Tratteremo in questa tesi sempre cammini aleatori aperiodici e tutti i risultati esposti si riferiranno a cammini aleatori di questo genere.

Utilizziamo ora le notazioni della teoria della misura ⁴per dare una nuova definizione di ricorrenza. Innanzitutto però adattiamo i concetti della teoria della misura al caso specifico dei cammini aleatori.

Lo spazio di probabilità Ω nel nostro caso sarà l'insieme delle successioni infinite

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots), \quad \forall \omega_i \in R.$$

dove R è lo spazio degli stati di un dato cammino aleatorio, ovvero Ω è l'insieme delle traiettorie ω del cammino aleatorio.

Definiamo ora la σ -algebra \mathcal{F} . Innanzitutto \mathcal{F} conterrà tutti gli *insiemi cilindrici*, cioè gli insiemi A_n della forma

$$A_n = \{\omega \mid \omega_k = a_k, \quad k = 1, 2, \dots, n\}, \quad n \geq 0, \quad (1.30)$$

dove $a_k \in R, \forall k = 1, \dots, n$; definiamo \mathcal{F} come la *più piccola σ -algebra che contiene tutti gli insiemi cilindrici*.

⁴Per un approfondimento sulla teoria della misura si veda Appendice A.

Per definire la probabilità di misura, in termini di funzione di transizione $P(x, y)$ di un dato cammino aleatorio, definiamo

$$P[A_n] = P(0, a_1)P(0, a_2) \dots P(0, a_n), \quad n \geq 0$$

per ogni insieme cilindrico (il prodotto vuoto, quando $n = 0$, si dice avere valore uno). Si prova che vale il *teorema di estensione*⁵, cioè che esiste una e una sola misura di probabilità $P[\cdot]$, numerabilmente additiva, definita sull'intera σ algebra \mathcal{F} . Questo completa la definizione di uno *spazio di probabilità* (Ω, \mathcal{F}, P) , corrispondente ad un dato cammino aleatorio con funzione di transizione $P(x, y)$ e stato degli spazi R .

Definizione 1.14. Denotiamo le variabili aleatorie ω_k nel seguente modo

$$\omega_k = \xi_k(\omega) = \xi_k \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$X_0 = 0, \quad X_n = \xi_1 + \dots + \xi_n, \quad n \geq 1.$$

Chiamiamo $f(\omega) = f$; se f è una variabile aleatoria, scriviamo $\forall y \in R$

$$P[f = y] = P[\omega | f(\omega) = y]$$

e se $f(\omega) = f$ è integrabile, allora

$$E[f] = \int_{\Omega} f(\omega) dP(\omega)$$

è detta la sua *aspettazione* o *valore atteso*. Quando $A \in \mathcal{F}$, il simbolo $E[f; A]$ denota l'aspettazione $E[f(\omega)\varphi_A(\omega)]$ dove $\varphi_A(\omega) = 1$ quando $\omega \in A$ e zero altrimenti.

Proposizione 1.10. (a) Se $f(\omega) = F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ è una funzione integrabile di X_1, X_2, \dots, X_n allora il suo valore di aspettazione è

⁵Si veda [1] e [9].

$$\begin{aligned}
E[f] &= \sum_{x_i \in R, i=1,2,\dots,n} F(x_1, x_2, \dots, x_n) P[X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n] = \\
&= \sum_{x_i \in R, i=1,2,\dots,n} F(x_1, x_2, \dots, x_n) P(0, x_1) P(x_1, x_2) \dots P(x_{n-1}, x_n).
\end{aligned}$$

In particolare, sia $f(\omega) = 1$ se $X_n = y \in R$, e 0 altrimenti, allora

$$E[f] = P[X_n = y] = P_n(0, y). \quad (1.31)$$

(b) Le variabili aleatorie $\omega_n = \xi_k$ sono funzioni tra loro indipendenti. Più in generale, siano I e J due sottoinsiemi disgiunti dei numeri naturali. Sia \mathcal{F}_I la più piccola sotto- σ -algebra che contiene tutti gli insiemi della forma $[\omega|\omega_k = y]$ per $k \in I$ e $y \in R$, e definiamo \mathcal{F}_J in modo simile. Supponiamo ora che $f(\omega)$ e $g(\omega)$ siano integrabili su (Ω, \mathcal{F}, P) e che $f(\omega)$ sia misurabile rispetto a \mathcal{F}_I e $g(\omega)$ rispetto a \mathcal{F}_J . Allora f e g sono funzioni indipendenti e

$$E[fg] = E[f]E[g]. \quad (1.32)$$

L'equazione (1.31) della parte (a) fa uso della definizione 1.3 di $P_n(0, y)$, e l'equazione (1.32) della parte (b) è il teorema di Fubini che viene menzionato al numero (4) della definizione A.1.

Sia

$$A_n = \{\omega | X_n = 0\},$$

allora

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

è l'evento che si torni nell'origine almeno una volta, e

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

l'evento che si torni in 0 infinite volte. Utilizzando la definizione (1.9) di ricorrenza e transienza proviamo la seguente proposizione:

Proposizione 1.11. $P[\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n}] = 1$ se e solo se il cammino aleatorio definito dalla misura di probabilità $P[\cdot]$ su (Ω, \mathcal{F}, P) è ricorrente, e $P[\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n}] = 0$ se e solo se è transiente.

Dimostrazione. Poichè $P[\cdot]$ è una misura completamente additiva, la misura dell'intersezione di una successione monotona di insiemi è il limite delle loro misure ⁶. Poichè gli insiemi $\cup_{k=n}^{\infty} A_k = B_n$ formano una successione monotona, abbiamo

$$P\left[\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n}\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} P[B_n]. \quad (1.33)$$

Ora consideriamo gli insiemi

$$B_{n,m} = \bigcup_{k=n}^{n+m} A_k \quad n \geq 1, \quad m \geq 0,$$

la cui misura è pari a

$$P[B_{n,m}] = \sum_{t \in R} P_{n-1}(0, t) \sum_{k=1}^{m+1} F_k(t, 0). \quad (1.34)$$

Nel caso ricorrente, mandando $m \rightarrow \infty$ in (1.34) e osservando che gli insiemi $B_{n,m}$ tendono a B_n , si ha

$$P[B_n] = \lim_{m \rightarrow \infty} P[B_{n,m}] = \sum_{t \in R} P_{n-1}(0, t) F(t, 0). \quad (1.35)$$

Sappiamo però, dalla proposizione (1.8) che $F(t, 0) = 1 \forall t$ tale che $P_{n-1}(0, t) > 0$. Quindi $P[B_n] = 1$ per $n \geq 1$ e l'equazione (1.33) mostra che

$$P\left[\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n}\right] = 1$$

Nel caso transiente, considerando l'equazione (1.34), osserviamo che

⁶Si veda (A.1).

$$P[B_{n,m}] \leq \sum_{t \in R} P_{n-1}(0, t) \sum_{k=1}^{m+1} P_k(t, 0) =$$

$$\sum_{j=n}^{n+m} P_j(0, 0) = G_{n+m}(0, 0) - G_{n-1}(0, 0), \quad n \geq 1. \quad (1.36)$$

Mandando $m \rightarrow \infty$, per la proposizione (1.4) si ha

$$P[B_n] \leq G(0, 0) - G_{n-1}(0, 0) < \infty,$$

quindi infine

$$P\left[\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} A_n\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} P[B_n] \leq G - G = 0.$$

□

Riportiamo di seguito l'enunciato della *legge dei grandi numeri*, di cui ci serviremo per avere una condizione sufficiente affinché un cammino aleatorio sia transiente.

Proposizione 1.12. Se un arbitrario cammino aleatorio ha

$$m = \sum_{x \in R} |x| P(0, x) < \infty,$$

$$\mu = \sum_{x \in R} x P(0, x),$$

allora la successione di variabili aleatorie $X_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ ha la proprietà che

$$P\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = \mu\right] = 1 \quad (1.37)$$

Naturalmente quando $d > 1$ la media μ è un vettore, così come lo sono le variabili aleatorie X_n .

Vediamo, quindi, come possiamo utilizzare tale proposizione per avere una condizione sufficiente per la transienza di un cammino aleatorio. Consideriamo un cammino aleatorio di dimensione $d = 1$ e assumiamo $\mu \neq 0$, sia

$$C_n = \left\{ \omega \mid \left| \frac{X_n}{n} - \mu \right| > \frac{|\mu|}{2} \right\},$$

allora la proposizione (1.12) implica

$$P \left[\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} C_n \right] = 0.$$

Sia ora $A_n = \{\omega \mid X_n = 0\}$, vediamo che per come è definito C_n si ha $A_n \subset C_n \forall n \geq 1$. Per la proposizione 1.11, il limite superiore della successione di insiemi A_n ha misura zero se e solo se il cammino aleatorio (la cui traiettoria appartiene a A_n), è transiente.

Possiamo quindi concludere che un cammino aleatorio con $m < \infty$ e $\mu \neq 0$ è transiente. La dimostrazione è valida anche per cammini aleatori di dimensione $d > 1$.

Enunciamo ora un importante teorema che ci dà condizioni sufficienti per determinare la ricorrenza e la transienza di un cammino aleatorio, dimostreremo il teorema più avanti, servendoci di concetti che verranno introdotti nella prossima sezione.

Teorema 1.1. *Un cammino aleatorio aperiodico di dimensione d è ricorrente se*

(a)

$$d = 1, 2 \quad m_2 < \infty \quad e \quad \mu = 0;$$

se

(b)

$$d \geq 3 \quad \text{è sempre transiente.}$$

1.3 Funzione caratteristica

Come abbiamo visto precedentemente R è l'insieme di dimensione d dei punti $x = (x^1, x^2, \dots, x^d)$ dove gli x^i sono interi. Consideriamo ora l'intero spazio euclideo (non solo i punti a coordinate intere) che denotiamo con E , della stessa dimensione d di R ; gli elementi di E sono i punti $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d)$, dove ogni θ_i è un numero reale per $i = 1, 2, \dots, d$.

Definizione 1.15. Per $x \in R$, $\theta \in E$,

$$|x|^2 = \sum_i^d (x^i)^2, \quad |\theta|^2 = \sum_i^d (\theta_i)^2, \quad x \cdot \theta = \sum_i^d x^i \theta_i.$$

Definizione 1.16. La *funzione caratteristica* di un cammino aleatorio è

$$\phi(\theta) = \sum_{x \in R} P(0, x) e^{ix \cdot \theta}, \quad \theta \in E$$

Osservazione 1.4. $\phi(\theta)$ non è altro che una serie di Fourier, i cui coefficienti sono non negativi e la cui somma è pari a uno.

Per prima cosa vediamo delle convenienti notazioni per l'integrazione su E , ed in particolare sul cubo C in E con centro nell'origine e lati di lunghezza pari a 2π , ovvero

Definizione 1.17.

$$C = \{\theta \mid \theta \in E, \quad |\theta_i| \leq \pi \quad \text{per} \quad i = 1, 2, \dots, d\}.$$

Per funzioni a valori complessi $f(\theta)$ che sono integrabili secondo Lebesgue su C , l'integrale su C è denotato come

$$\int f d\theta = \int_C f d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta_1 \dots d\theta_d.$$

Dove $d\theta$ denota l'elemento di volume (misura di Lebesgue in E).

Un risultato fondamentale per l'analisi di Fourier è il seguente

Proposizione 1.13.

$$(2\pi)^{-d} \int_C e^{i\theta \cdot (x-y)} d\theta = \delta(x, y), \quad (1.38)$$

per ogni coppia $x, y \in R$.

Dimostrazione. Ci riduciamo al caso uni-dimensionale, poichè l'integrale in (1.38) può essere scritto come il prodotto di d integrali di dimensione uno con dominio di integrazione $[-\pi, \pi]$. Così si ha

$$\prod_{k=1}^d \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta_k(x^k - y^k)} d\theta_k = \prod_{k=1}^d \delta(x^k, y^k) = \delta(x, y),$$

che dipende dal fatto che per ogni intero n

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} d\theta = \delta(n, 0).$$

Nel nostro caso $n = x^k - y^k$, quindi se $x^k = y^k$ allora $n = 0$ e $\delta(n, 0) = 1$, se invece $x^k \neq y^k$ allora $\delta(n, 0) = 0$. L'ortogonalità delle funzioni esponenziali è così dimostrata. □

Proposizione 1.14. Se $\phi(\theta)$ è la funzione caratteristica della funzione di transizione $P(x, y)$, allora per ogni intero $n \geq 0$

(1)

$$\phi^n(\theta) = \sum_{x \in R} P_n(0, x) e^{ix \cdot \theta} \quad \forall \theta \in E,$$

(2)

$$P_n(0, y) = (2\pi)^{-d} \int e^{-iy \cdot \theta} \phi^n(\theta) d\theta \quad \forall y \in R.$$

Dimostrazione. Per definizione

$$P[X_n = x] = P_n(0, x)$$

dove, come abbiamo già visto nella definizione 1.14, $X_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ è la somma degli incrementi indipendenti d -dimensionali. Utilizzando la proposizione (1.10), l'indipendenza delle ξ_k e il fatto che ognuna di esse ha una funzione caratteristica $\phi(\theta)$ otteniamo

$$\sum_{x \in R} P_n(0, x) e^{i\theta \cdot x} = E[e^{i\theta \cdot X_n}] = E[e^{i\theta \cdot (\xi_1 + \dots + \xi_n)}] =$$

$$\prod_{k=1}^n E[e^{i\theta \cdot \xi_k}] = \phi^n(\theta)$$

e la parte (1) è dimostrata.

La parte (2) segue moltiplicando entrambi i membri di (1) per $e^{-iy \cdot \theta}$ e integrando su C , infatti così facendo si ha

$$\int_C e^{-iy \cdot \theta} \phi^n(\theta) d\theta = \int_C \sum_{x \in R} P_n(0, x) e^{ix \cdot \theta} e^{-iy \cdot \theta}, \quad (1.39)$$

per l'ortogonalità delle funzioni esponenziali vista nella prop 1.13 la (1.39) sarà diversa da zero solo se $x = y$, per cui

$$\int_C \sum_{x \in R} P_n(0, x) e^{ix \cdot \theta} e^{-iy \cdot \theta} = P_n(0, y) \int_C d\theta =$$

$$P_n(0, y) \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_1 \dots d\theta_d = P_n(0, y) (2\pi)^d. \quad (1.40)$$

Dalla (1.39) e dalla (1.40) otteniamo

$$P_n(0, y) = (2\pi)^{-d} \int e^{-iy \cdot \theta} \phi^n(\theta) d\theta.$$

□

Vediamo ora una proposizione riguardante il comportamento della funzione caratteristica vicino a $\theta = 0$. Un'importante risultato a tal proposito

è la relazione tra il comportamento di una successione (o funzione) e il comportamento della sua serie di Fourier (o trasformata) vicino all'origine, che utilizzeremo nei capitoli successivi.

Proposizione 1.15. In una dimensione, quando $m_k < \infty$, la derivata k -esima di $\phi(\theta)$ è una funzione continua, e si ha $\phi^{(k)}(0) = i^k \mu_k$.

Dimostrazione. Dimostriamolo per $k = 1$. Se $m_1 < \infty$, allora

$$\frac{1}{h}[\phi(\theta + h) - \phi(\theta)] = \frac{1}{h} \sum_{x \in R} (e^{ihx} - 1) e^{i\theta x} P(0, x).$$

Ora

$$|e^{ihx} - 1| = \left| \int_0^{hx} e^{it} dt \right| \leq \int_0^{|hx|} dt = |hx|,$$

quindi per la disuguaglianza precedente

$$\frac{1}{h} \sum_{x \in R} |e^{ihx} - 1| |e^{i\theta x}| P(0, x) \leq \sum_{x \in R} |x| P(0, x) = m_1.$$

Possiamo quindi applicare l'analogo discreto per le serie del teorema della convergenza dominata di Lebesgue, e scambiare il segno di sommatoria con quello di limite, mandando $h \rightarrow 0$, ovvero

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \sum_{x \in R} (e^{ihx} - 1) e^{i\theta x} P(0, x) = \sum_{x \in R} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (e^{ihx} - 1) e^{i\theta x} P(0, x)$$

Quindi si ha

$$\phi^{(1)}(\theta) = \sum_{x \in R} \frac{d}{dh} (e^{ihx}) e^{i\theta x} P(0, x) = i \sum_{x \in R} x e^{i\theta x} P(0, x),$$

quindi $\phi^{(1)}(0) = i\mu_1$. Essendo inoltre la serie definita uniformemente convergente, $\phi^{(1)}(\theta)$ è continua ⁷. Lo stesso argomento è usato per dimostrare la continuità di $\phi^{(k)}(\theta)$ quando $m_k < \infty$, e anche la validità di $\phi^{(k)}(0) = i^k \mu_k$.

□

⁷Se la successione di funzioni continue f_n converge uniformemente \Rightarrow il suo limite f è una funzione continua.

Torniamo adesso al concetto di aperiodicità di un cammino aleatorio. Possiamo servirci ora della funzione caratteristica per individuare criteri che stabiliscano se un cammino aleatorio è aperiodico o meno e per studiarne le proprietà.

Teorema 1.2. *Un cammino aleatorio su R (di dimensione d), è aperiodico se e solo se la sua funzione caratteristica $\phi(\theta)$, definita $\forall \theta \in E$ (di dimensione d) ha la seguente proprietà: $\phi(\theta) = 1$ se e solo se tutte le coordinate di θ sono multipli interi di 2π .*

Per la dimostrazione si veda [1].

Sia ora $A = (a_{i,j})_{i,j=1,2,\dots,d}$ una matrice simmetrica, allora per $\theta \in E$, consideriamo la seguente forma quadratica

$$\theta \cdot A\theta = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_{ij} \theta_i \theta_j. \quad (1.41)$$

Come è ben noto la forma quadratica è definita positiva se

$$\theta \cdot A\theta \geq 0 \quad \forall \theta \in E, \quad (1.42)$$

e $\theta \cdot A\theta = 0$ solo quando $\theta = 0$. Una forma quadratica positiva ha autovalori reali positivi. Riportiamo il seguente risultato che ci tornerà utile in seguito

Proposizione 1.16. Per $\theta \in E$ vale

$$\lambda_1 |\theta|^2 \leq \theta \cdot A\theta \leq \lambda_d |\theta|^2, \quad (1.43)$$

se A è definita positiva e ha autovalori $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_d$.

Per la dimostrazione si veda [8].

Proposizione 1.17. Per un cammino aleatorio aperiodico di dimensione $d \geq 1$, con funzione caratteristica $\phi(\theta)$, esiste una costante $\lambda > 0$ tale che

$$1 - \operatorname{Re} \phi(\theta) \geq \lambda |\theta|^2$$

$\forall \theta$ in C .

Dimostrazione. Poichè per le ipotesi fatte $R = \bar{R}$, di dimensione $d \geq 1$, possiamo trovare vettori linearmente indipendenti a_1, a_2, \dots, a_d nell'insieme $\Sigma = [x | P(0, x) > 0]$. Sia $L = \max |a_k|$. Allora avremo che la forma quadratica

$$Q_L(\theta) = \sum_{|x| \leq L} (x \cdot \theta)^2 P(0, x)$$

è definita positiva, in quanto

$$Q_L(\theta) \geq \sum_{k=1}^d (a_k \cdot \theta)^2 P(0, a_k).$$

Poichè $a_k \in \Sigma$ (cioè $P(0, a_k) > 0$) per $k = 1, 2, \dots, d$, il membro di destra della disuguaglianza precedente sarà uguale a zero solo se θ è perpendicolare a tutti gli a_1, a_2, \dots, a_d , cosa non possibile essendo linearmente indipendenti, così $Q_L(\theta)$ è definita positiva.

Ora

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [1 - \phi(\theta)] &= \sum_{x \in R} [1 - \cos x \cdot \theta] P(0, x) = \\ &= 2 \sum_{x \in R} \sin^2 \left(\frac{x \cdot \theta}{2} \right) P(0, x) \geq 2 \sum_{|x| \leq L} \sin^2 \left(\frac{x \cdot \theta}{2} \right) P(0, x). \end{aligned}$$

Poichè $|\sin \frac{x \cdot \theta}{2}| \geq \pi^{-1} |x \cdot \theta|$ quando $|x \cdot \theta| \leq \pi$,

$$\operatorname{Re} [1 - \phi(\theta)] \geq \frac{2}{\pi^2} \sum_{[x] |x| \leq L; |x \cdot \theta| \leq \pi} (x \cdot \theta)^2 P(0, x).$$

Ma per $|x| \leq L$ sappiamo che $|x \cdot \theta| \leq \pi$ quando $|\theta| \leq \pi L^{-1}$, quindi

$$\operatorname{Re} [1 - \phi(\theta)] \geq \frac{2}{\pi^2} \sum_{|x| \leq L} (x \cdot \theta)^2 P(0, x) = \frac{2}{\pi^2} Q_L(\theta)$$

$\forall \theta$ tale che $|\theta| \leq \pi L^{-1}$. Se λ_1 è il più piccolo autovalore di $Q_L(\theta)$, allora per la proposizione 1.16 vale

$$1 - \operatorname{Re}\phi(\theta) \geq \frac{2}{\pi^2} \lambda_1 |\theta|^2 \quad \text{per } |\theta| \leq \pi L^{-1}. \quad (1.44)$$

La sfera di raggio $|\theta| \leq \pi L^{-1}$ è un sottoinsieme del cubo C , dato che $L^{-1} \leq 1$. Se usiamo il teorema 1.2 possiamo dire che $1 - \operatorname{Re}\phi(\theta) > 0$ quando $\theta \in C$ e $|\theta| \geq \pi L^{-1}$. Poichè $1 - \operatorname{Re}\phi(\theta)$ è una funzione continua su C abbiamo

$$m = \min_{[\theta \in C; |\theta| \geq \pi L^{-1}]} [1 - \operatorname{Re}\phi(\theta)] > 0,$$

che implica

$$1 - \operatorname{Re}\phi(\theta) \geq \frac{mL^2}{\pi^2} |\theta|^2 \quad \text{per } \theta \in C, \quad |\theta| \geq \pi L^{-1}. \quad (1.45)$$

Ora combinando le disuguaglianze (1.44) e (1.45) troviamo che la nostra proposizione è provata per $\lambda = \min [2\pi^{-2}\lambda_1, m\pi^{-2}L^2] > 0$. \square

Le seguenti proposizioni ci serviranno per dimostrare il teorema (1.1) di cui avevamo dato l'enunciato alla fine della sezione precedente. Ci occuperemo di studiare il comportamento asintotico della funzione di transizione $P_n(0, x)$ per $n \rightarrow \infty$. Vale a tal proposito che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(0, 0) = 0, \quad \text{se } P(0, 0) \neq 1, \quad (1.46)$$

o equivalentemente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in R} P_n(0, x) = 0 \quad (1.47)$$

che risulta valido in ogni caso eccetto quando $P(0, x) = 1$ per qualche $x \in R$. Se comunque (1.46) risulta abbastanza ovvio per cammini aleatori transienti, dimostrarlo nel caso ricorrente richiede qualche sforzo in più, troveremo a

questo scopo un estremo superiore per la nostra funzione di transizione che dipenderà dalla dimensione del cammino.

Proposizione 1.18. Sia $P(x, y)$ la funzione di transizione di un cammino aleatorio aperiodico di dimensione $d \geq 1$, allora esiste una costante $A > 0$, tale che

$$P_n(0, x) \leq An^{-d/2}, \quad x \in R, \quad n \geq 1. \quad (1.48)$$

Dimostrazione. Supponiamo di riuscire a trovare un estremo superiore per $P_n(0, x)$. Consideriamo $P_{2n}(0, x)$, per la proposizione 1.14 si ha

$$(2\pi)^d \sup_{x \in R} P_{2n}(0, x) = \sup_{x \in R} \int e^{-ix \cdot \theta} \phi^{2n}(\theta) d\theta \leq \int |\phi(\theta)|^{2n} d\theta = \int \psi^n(\theta) d\theta, \quad (1.49)$$

avendo posto $|\phi(\theta)|^2 = \psi(\theta)$. Lo stesso estremo superiore si ottiene se consideriamo $P_{2n+1}(0, x)$ al posto di $P_{2n}(0, x)$, infatti

$$\begin{aligned} (2\pi)^d \sup_{x \in R} P_{2n+1}(0, x) &= (2\pi)^d \sup_{x \in R} \sum_{t \in R} P(0, t) P_{2n}(t, x) \\ &\leq \sum_{t \in R} P(0, t) \int \psi^n(\theta) d\theta = \int \psi^n(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Quindi la (1.48) risulterà valida se riusciamo a trovare una costante $A > 0$ tale che

$$\int_C \psi^n(\theta) d\theta \leq An^{-d/2}, \quad n \geq 1. \quad (1.50)$$

Poichè ψ è reale (essendo uguale a $|\phi(\theta)|^2$), per la proposizione 1.17 possiamo scrivere

$$1 - \psi(\theta) \geq \lambda |\theta|^2, \quad \theta \in C,$$

per qualche $\lambda > 0$. Così

$$0 \leq \psi(\theta) \leq 1 - \lambda |\theta|^2 \leq e^{-\lambda |\theta|^2}, \quad \theta \in C,$$

$$\int_C \psi^n(\theta) d\theta \leq \int_C e^{-\lambda |\theta|^2 n} d\theta \leq \int_E e^{-\lambda |\theta|^2 n} d\theta,$$

effettuando il cambio di variabile $\alpha = \theta n^{1/2}$, si ha

$$\int_E e^{-\lambda |\theta|^2 n} d\theta = n^{-d/2} \int_E e^{-\lambda |\alpha|^2} d\alpha = A n^{-d/2}, \quad n \geq 1.$$

Quindi, come volevamo

$$\int_C \psi^n(\theta) d\theta \leq A n^{-d/2}, \quad n \geq 1.$$

La costante A è finita, poichè è l'integrale della funzione gaussiana $\exp(-\lambda |\alpha|^2)$ sullo spazio euclideo d -dimensionale. La dimostrazione è così completa. \square

Ci sono dei cammini aleatori per i quali l'estremo superiore si conosce, nel senso che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{d/2} P_n(0, x)$$

esiste ed è positivo per ogni x in R di dimensione d .

Proposizione 1.19. Per un cammino aleatorio aperiodico di dimensione arbitraria $d \geq 1$, con il vettore media $\mu = 0$ e secondo momento assoluto $m_2 < \infty$, $Q(\theta) = \sum_{x \in R} (x \cdot \theta)^2 P(0, x)$ è definita positiva e

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \phi(\theta)}{Q(\theta)} = \frac{1}{2}. \quad (1.51)$$

Per la dimostrazione si veda [1].

Proposizione 1.20. Un cammino aleatorio fortemente aperiodico di dimensione arbitraria $d \geq 1$ ha la proprietà che $|\phi(\theta)| = 1$ solo quando ogni coordinata di θ è un multiplo di 2π . Viceversa, ogni cammino aleatorio con questa proprietà è fortemente aperiodico.

Per la dimostrazione si veda [1].

Proposizione 1.21. Per cammini aleatori fortemente aperiodici di dimensione $d \geq 1$ con media $\mu = 0$ e secondo momento finito,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2\pi n)^{d/2} P_n(0, x) = |Q|^{-1/2}, \quad x \in R,$$

dove $|Q|$ è il determinante della forma quadratica

$$Q(\theta) = \sum_{x \in R} (x \cdot \theta)^2 P(0, x).$$

Dimostrazione. Per la proposizione 1.18 possiamo scrivere

$$(2\pi n)^{d/2} P_n(0, x) = n^{d/2} (2\pi)^{-d/2} \int_C \phi^n(\theta) e^{-ix \cdot \theta} d\theta.$$

Facciamo il cambio di variabili $\theta\sqrt{n} = \alpha$, tale che

$$(2\pi n)^{d/2} P_n(0, x) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\sqrt{n}C} \phi^n\left(\frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right) e^{-\frac{ix \cdot \alpha}{\sqrt{n}}} d\alpha. \quad (1.52)$$

Con $A > 0$, e $0 < r < \pi$, si decompone l'integrale in (1.52) per ottenere

$$(2\pi n)^{d/2} P_n(0, x) = (2\pi)^{-d/2} \int_E e^{-\frac{1}{2}Q(\alpha)} e^{-\frac{ix \cdot \alpha}{\sqrt{n}}} d\alpha +$$

$$I_1(n, A) + I_2(n, A) + I_3(n, A_r) + I_4(n, r).$$

Gli ultimi quattro integrali sono termini d'errore, e sono

$$\begin{aligned}
I_1(n, A) &= (2\pi)^{-d/2} \int_{|\alpha| \leq A} \left[\phi^n \left(\frac{\alpha}{\sqrt{n}} \right) - e^{-\frac{1}{2}Q(\alpha)} \right] e^{-\frac{ix \cdot \alpha}{\sqrt{n}}} d\alpha, \\
I_2(n, A) &= -(2\pi)^{-d/2} \int_{|\alpha| > A} e^{-\frac{1}{2}Q(\alpha)} e^{-\frac{ix \cdot \alpha}{\sqrt{n}}} d\alpha, \\
I_3(n, A_r) &= (2\pi)^{-d/2} \int_{A < |\alpha| \leq r\sqrt{n}} \phi^n \left(\frac{\alpha}{\sqrt{n}} \right) e^{-\frac{ix \cdot \alpha}{\sqrt{n}}} d\alpha, \\
I_4(n, r) &= (2\pi)^{d/2} \int_{|\alpha| > r\sqrt{n}; \alpha \in \sqrt{n}C} \phi^n \left(\frac{\alpha}{\sqrt{n}} \right) e^{-\frac{ix \cdot \alpha}{\sqrt{n}}} d\alpha.
\end{aligned}$$

Mostriamo quindi che il termine principale ci fornisce il limite desiderato e che di conseguenza gli ultimi quattro termini d'errore tendono a zero per $n \rightarrow \infty$.

Se $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_d$ sono gli autovalori della forma quadratica definita positiva $Q(\theta)$, allora una rotazione del sistema di coordinate ci da

$$\begin{aligned}
I_0 &= (2\pi)^{-d/2} \int_E e^{-\frac{1}{2}Q(\alpha)} d\alpha = (2\pi)^{-d/2} \int_E e^{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^d \lambda_k \alpha_k^2} d\alpha = \\
&= (2\pi)^{-d/2} \prod_{k=1}^d \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \lambda_k \alpha_k^2} d\alpha_k = \left[\prod_{k=1}^d \lambda_k \right]^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Ma il prodotto degli autovalori di Q è il determinante $|Q|$, quindi $I_0 = |Q|^{-1/2}$. Poichè l'integrale è finito, è chiaro che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2\pi)^{-d/2} \int_E e^{-\frac{1}{2}Q(\alpha)} e^{-\frac{ix \cdot \alpha}{\sqrt{n}}} d\alpha = |Q|^{-1/2}.$$

Ci rimane quindi solo da far vedere che i quattro termini di errore tendono a zero per $n \rightarrow \infty$.

Per stimare $I_1(A, n)$ ci serviamo della proposizione 1.19, per la quale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n \left(\frac{\alpha}{\sqrt{n}} \right) = e^{-\frac{1}{2}Q(\alpha)}$$

$\forall \alpha \in E$. Così $I_1(A, n)$ tende a zero per $n \rightarrow \infty$, $\forall A > 0$.

Ora per stimare $I_3(n, r)$, usiamo nuovamente la proposizione 1.19 e scegliamo un r abbastanza piccolo in modo tale che valga

$$\left| \phi^n \left(\frac{\alpha}{\sqrt{n}} \right) \right| \leq e^{-\frac{1}{4}Q(\alpha)}$$

quando $|\alpha| \leq r\sqrt{n}$. Allora

$$|I_3(n, A, r)| \leq (2\pi)^{-d/2} \int_{|\alpha| > A} e^{-\frac{1}{4}Q(\alpha)} d\alpha$$

$\forall n$. Similmente

$$|I_2(n, A)| \leq (2\pi)^{-d/2} \int_{|\alpha| > A} e^{-\frac{1}{2}Q(\alpha)} d\alpha$$

è indipendente da n . Quindi la somma di I_1 e I_3 può essere resa piccola quanto si vuole scegliendo r piccolo abbastanza e A grande abbastanza e quindi per $n \rightarrow \infty$ abbiamo che la loro somma tende a zero.

Ora stimiamo $|I_4(n, r)|$, osserviamo che

$$|I_4(n, r)| \leq n^{d/2} (2\pi)^{-d/2} \int_{[\theta | \theta \in C; |\theta| > r]} |\phi(\theta)|^n d\theta.$$

Per la proposizione 1.20 vale che $|\phi(\theta)| < 1 - \delta$ per qualche $\delta = \delta(r)$ sul dominio di integrazione. Quindi $|I_4(n, r)|$ tende a zero per $n \rightarrow \infty$, quando $0 < r < \pi$. \square

Finalmente dimostriamo il teorema (1.1).

Dimostrazione. Consideriamo la proposizione 1.21, che è valida per cammini fortemente aperiodici. Se, allora, il nostro cammino è fortemente aperiodico, per tale proposizione possiamo dire che

$$P_n(0, 0) \sim Cn^{-d/2}, \quad \text{per } n \rightarrow \infty,$$

per qualche costante positiva C . Per cui la serie $G = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0, 0)$ diverge per $d = 1, 2$ e converge per $d \geq 3$.

Tuttavia noi vogliamo dimostrare il teorema anche nel caso più generale, in cui il cammino è aperiodico, ma non fortemente. Possiamo allora considerare la seguente osservazione, per la quale *un cammino aleatorio con $P(0, 0) > 0$ è aperiodico se e solo se è fortemente aperiodico*. (Infatti se $P(0, 0) > 0$, allora $|\phi(\theta)| = 1$ se e solo se $\phi(\theta) = 1$. Così la conclusione segue dal teorema 1.2 e dalla proposizione 1.20). Ora se $P(x, y)$ soddisfa le ipotesi in (a), si può certamente trovare un intero $t \geq 1$, tale che $P_t(0, 0) > 0$, quindi se il cammino aperiodico con funzione di transizione $P_t(x, t)$ è aperiodico, allora è fortemente aperiodico ⁸ e possiamo utilizzare nuovamente la proposizione 1.21 per dimostrare il teorema.

In conclusione un cammino aleatorio aperiodico su una retta o su un piano, con media $\mu = 0$ e secondo momento assoluto finito è ricorrente, essendo $G = +\infty$, mentre un cammino aleatorio che si muove in dimensione $d \geq 3$ è sempre transiente essendo $G < \infty$. \square

⁸Per un approfondimento sulla questione si veda [1].

Capitolo 2

Teoremi del limite

2.1 Teorema del limite centrale

I teoremi del limite descrivono la distribuzione limite di somme, adeguatamente scalate, di un gran numero di variabili aleatorie indipendenti, a cui spesso, come nel caso dei cammini aleatori, si richiede che siano anche identicamente distribuite. Considerando quindi i cammini aleatori come somma di variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite e sfruttando i teoremi del limite, sapremo il comportamento di tale cammino per $n \rightarrow \infty$ dove n ricordiamo è il numero di ‘passi’.

Coinvolgiamo ora anche variabili aleatorie che prendono valori in tutto \mathbb{R} e consideriamo la seguente definizione di convergenza debole.

Definizione 2.1. Sia $F(x)$ una *funzione di distribuzione* o *funzione cumulativa*¹. Una successione di funzioni di distribuzione $F_n(x)$ è detta *convergere debolmente* alla funzione di distribuzione $F(x)$ se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x) \quad (2.1)$$

¹La funzione $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ è monotona non decrescente. $F(x) = P(X \leq x)$ e si ha che $F(-\infty) = 0$ e $F(+\infty) = 1$.

per ogni funzione continua e limitata $g(x)$, $-\infty < x < \infty$. Equivalentemente possiamo dire che la successione $F_n(x)$ ha per limite $F(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ che è un punto di continuità di $F(x)$.

Sia ξ_1, ξ_2, \dots una successione di variabili aleatorie indipendenti e con varianze finite e sia $m_i = E(\xi_i)$, $\sigma_i^2 = \text{Var}(\xi_i) < \infty$, $X_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, $M_n = E(X_n) = \sum_{i=1}^n m_i$, $D_n^2 = \text{Var}(X_n) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$. Sia $F_i = F_{\xi_i}$ la funzione di distribuzione della variabile aleatoria ξ_i .

Definizione 2.2. *Condizione di Lindenberg.* La condizione di Lindenberg è soddisfatta se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{D_n^2} \sum_{i=1}^n \int_{x: |x-m_i| \geq \epsilon D_n} (x - m_i)^2 dF_i(x) = 0$$

$\forall \epsilon > 0$.

Questa condizione, come si può facilmente vedere, implica che per $n \rightarrow \infty$, $D_n \rightarrow \infty$.

Teorema 2.1. (Teorema del limite centrale, Condizione di Lindenberg) *Sia ξ_1, ξ_2, \dots una successione di variabili aleatorie indipendenti e con varianze finite. Se è soddisfatta la condizione di Lindenberg, allora la distribuzione di $(X_n - M_n)/D_n$ converge debolmente alla distribuzione gaussiana standard $N(0, 1)$ per $n \rightarrow \infty$.*

Per una dimostrazione si veda [2].

Estendiamo il teorema del limite centrale a successioni di variabili aleatorie che oltre ad essere indipendenti siano anche identicamente distribuite, che sono quelle che a noi interessano per i cammini aleatori, e per le quali la condizione di Lindenberg è assicurata².

Teorema 2.2. *Sia ξ_1, ξ_2, \dots una successione di variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite con varianza finita, tale che $m = E(\xi_1)$, $0 <$*

²Per un approfondimento si veda [2].

$\sigma^2 = \text{Var}(\xi_1) < \infty$. Allora la distribuzione di $(X_n - nm)/\sqrt{n}\sigma$ converge debolmente alla distribuzione $N(0, 1)$ per $n \rightarrow \infty$.

Per la dimostrazione possiamo assumere $m = 0$, altrimenti si può considerare una nuova successione di variabili aleatorie $\tilde{\xi}_i = \xi_i - m$ che hanno aspettazione nulla. Sia $\tau_n = X_n/\sqrt{n}\sigma$ e $\phi_{\tau_n}(\theta)$ la sua funzione caratteristica e sia $\phi(\theta)$ la funzione caratteristica delle variabili ξ_i per $i = 1, \dots, n$, allora quello che fondamentalmente dobbiamo dimostrare è che, $\forall \theta \in \mathbb{R}$

$$\phi_{\tau_n}(\theta) \rightarrow e^{-\frac{\theta^2}{2}} \quad \text{per } n \rightarrow \infty, \quad (2.2)$$

questo perchè se P_n è una successione di misure di probabilità su \mathbb{R} con funzione caratteristica $\phi_n(\theta)$ e P è una misura di probabilità su \mathbb{R} con funzione caratteristica $\phi(\theta)$, allora P_n converge debolmente a P se e solo se $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(\theta) = \phi(\theta)$.³

Osservazione 2.1. La dimostrazione può essere modificata per vedere che la convergenza in (2.2) è uniforme su un insieme compatto di valori di θ .

Osservazione 2.2. Naturalmente il Teorema del Limite Centrale che abbiamo riportato si generalizza a variabili aleatorie vettoriali.

2.2 Teorema del limite locale

Consideriamo ora solo variabili aleatorie a valori interi, allora il risultato del Teorema del Limite Centrale può essere rafforzato dal seguente *Teorema del limite locale* che riportiamo in questa sezione (teorema 2.3).

Consideriamo quindi la variabile aleatoria a valori interi ξ e sia $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ l'insieme finito o numerabile dei valori di ξ per i quali $p_j = P(\xi = x_j) \neq 0$.

Definizione 2.3. Diciamo che ξ genera l'insieme degli interi \mathbb{Z} se il massimo comune divisore di tutti gli elementi dell'insieme X è 1.

³Per una dimostrazione completa si veda [2].

Lemma 2.1. Se ξ genera \mathbb{Z} e $\phi(\theta) = E(e^{i\xi\theta})$ è la funzione caratteristica della variabile ξ , allora per ogni $\delta > 0$

$$\sup_{\delta \leq |\theta| \leq \pi} |\phi(\theta)| < 1. \quad (2.3)$$

Dimostrazione. Supponiamo che $x\theta_0 \in \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ per qualche θ_0 e $\forall x \in X$. Allora $\theta_0 \in \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ poichè 1 è il massimo comune divisore di tutti gli elementi di X . Quindi, se $\delta \leq |\theta| \leq \pi$, allora $x\theta \notin \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ per qualche $x \in X$. Questo implica che $e^{i\theta x} \neq 1$. Ora essendo

$$\phi(\theta) = \sum_{x_j \in X} p_j e^{i\theta x_j}$$

e poichè $\sum_{x_j \in X} p_j = 1$ e $p_j > 0$, la relazione $e^{i\theta x} \neq 1$ per qualche $x \in X$ implica che $|\phi(\theta)| < 1$. Poichè $|\phi(\theta)|$ è continua,

$$\sup_{\delta \leq |\theta| \leq \pi} |\phi(\theta)| < 1.$$

□

Sia ξ_1, ξ_2, \dots una successione di variabili aleatorie a valori interi, indipendenti e identicamente distribuite. Sia $m = E(\xi_1)$, $\sigma^2 = \text{Var}(\xi_1) < \infty$, $X_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, $M_n = E(X_n) = nm$, $D_n^2 = \text{Var}(X_n) = n\sigma^2$. Ci interessa conoscere quale sia la probabilità che X_n assuma il valore k , sia quindi $P_n(k) = P(X_n = k)$ e $z = z(n, k) = \frac{k - M_n}{D_n}$.

Teorema 2.3. (Teorema del limite locale) *Sia ξ_1, ξ_2, \dots una successione di variabili aleatorie a valori interi, indipendenti e identicamente distribuite con varianza finita tali che ξ_1 genera \mathbb{Z} . Allora*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(D_n P_n(k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \right) = 0 \quad (2.4)$$

uniformemente in k .

Dimostrazione. Proviamo il teorema per $m = 0$, il caso generale richiede solo delle modifiche banali. Sia $\phi(\theta)$ la funzione caratteristica di ogni variabile ξ_i , allora la funzione caratteristica della variabile aleatoria X_n è

$$\phi_{X_n}(\theta) = \phi^n(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_n(k) e^{i\theta k}. \quad (2.5)$$

infatti

$$\phi_{X_n}(\theta) = E(e^{i\theta X_n}) = E(e^{i\theta(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)}) = E(e^{i\theta \xi_1}) \cdot \dots \cdot E(e^{i\theta \xi_n}) = \prod_{i=1}^n \phi(\theta).$$

Quindi $\phi^n(\theta)$ è la serie di Fourier con coefficienti $P_n(k)$, per cui servendoci della formula per i coefficienti di Fourier possiamo conoscere il valore di $P_n(k)$:

$$2\pi P_n(k) = \int_{-\pi}^{\pi} \phi^n(\theta) e^{-i\theta k} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \phi^n(\theta) e^{-i\theta z D_n} d\theta$$

essendo $k = z D_n$. Effettuando il cambio di variabili $\theta = \theta / D_n$ otteniamo

$$2\pi D_n P_n(k) = \int_{-\pi D_n}^{\pi D_n} e^{-i\theta z} \phi^n\left(\frac{\theta}{D_n}\right) d\theta. \quad (2.6)$$

Ora,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta z - \frac{\theta^2}{2}} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta z - \frac{\theta^2}{2}} d\theta. \quad (2.7)$$

dove la prima uguaglianza deriva dal fatto che $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta z - \frac{\theta^2}{2}} d\theta = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{z^2}{2}}$ che è la trasformata di Fourier della densità della gaussiana standard.

Riscriviamo la (2.4) moltiplicata per 2π , come la somma di quattro integrali:

$$2\pi(D_n P_n(k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

dove

$$I_1 = \int_{-T}^T e^{-i\theta z} (\phi^n(\frac{\theta}{D_n}) - e^{-\frac{\theta^2}{2}}) d\theta,$$

$$I_2 = - \int_{|\theta| > T} e^{-i\theta z - \frac{\theta^2}{2}} d\theta,$$

$$I_3 = \int_{\delta D_n \leq |\theta| \leq \pi D_n} e^{-i\theta z} \phi^n\left(\frac{\theta}{D_n}\right) d\theta,$$

$$I_4 = \int_{T \leq |\theta| \leq \delta D_n} e^{-i\theta z} \phi^n\left(\frac{\theta}{D_n}\right) d\theta,$$

dove la costante positiva $T < \delta D_n$, e $\delta < \pi$ sarà scelta dopo. Per l'osservazione 2.1 il $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi\left(\frac{\theta}{D_n}\right) = e^{-\frac{\theta^2}{2}}$ converge uniformemente sull'intervallo $[-T, T]$, allora $\lim_{n \rightarrow \infty} I_1 = 0 \ \forall T$.

Il secondo integrale può essere stimato come segue

$$|I_2| \leq \int_{|\theta| > T} |e^{-i\theta z - \frac{\theta^2}{2}}| d\theta = \int_{\theta > T} e^{-\frac{\theta^2}{2}} d\theta,$$

che può essere reso arbitrariamente piccolo scegliendo T grande abbastanza, dato che l'integrale improprio $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\theta^2}{2}}$ converge.

Stimiamo il terzo integrale, considerando l'equazione (2.6), e il fatto che abbiamo supposto $\delta < \pi$

$$|I_3| \leq \int_{\delta D_n \leq |\theta| \leq \pi D_n} |e^{-i\theta z} \phi^n\left(\frac{\theta}{D_n}\right)| d\theta \leq 2\pi\sigma\sqrt{n} \left(\sup_{\delta \leq |\theta| \leq \pi} |\phi(\theta)| \right)^n,$$

che tende a zero per $n \rightarrow \infty$ per l'equazione (2.3).

Per stimare il quarto integrale consideriamo il fatto che la varianza finita implica che la funzione caratteristica è una funzione a valori complessi due volte differenziabile con continuità, $\phi'(0) = im = 0$ e $\phi''(0) = -\sigma^2$. Applicando quindi la formula di Taylor si ha

$$\phi(\theta) = 1 - \frac{\sigma^2 \theta^2}{2} + o(\theta^2) \quad \text{per } \theta \rightarrow 0.$$

Per $|\theta| \leq \delta$ e δ abbastanza piccolo otteniamo

$$|\phi(\lambda)| \leq 1 - \frac{\sigma^2 \theta^2}{4} \leq e^{-\frac{\sigma^2 \theta^2}{4}},$$

se $|\theta| \leq \delta D_n$, allora

$$|\phi(\frac{\theta}{D_n})|^n \leq e^{-\frac{n\sigma^2 \theta^2}{4D_n^2}} = e^{-\frac{\theta^2}{4}}.$$

Quindi

$$|I_4| \leq 2 \int_{T \leq |\lambda| \leq \delta D_n} e^{-\frac{\theta^2}{4}} d\theta \leq 2 \int_T^\infty e^{-\frac{\theta^2}{4}} d\theta,$$

che può essere arbitrariamente piccolo scegliendo T sufficientemente grande.

Quindi abbiamo dimostrato, come volevamo, che

$$2\pi(D_n P_n(k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\theta^2}{2}}) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

tende a 0 per $n \rightarrow \infty$.

□

Capitolo 3

Distribuzioni stabili

3.1 Definizioni di stabilità

In questo capitolo ci occupiamo delle distribuzioni stabili, una classe di distribuzioni di probabilità che ammettono marcate asimmetrie e ‘code grasse’. Asimmetrie e decrescita lenta sono dovute essenzialmente alla possibile divergenza dei loro momenti (ad eccezione della distribuzione gaussiana che fa parte di questa classe).

Definizione 3.1. La distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria X è detta *stabile* se, date due variabili X_1 e X_2 indipendenti e distribuite come la X , per ogni coppia di costanti positive a e b , esiste una coppia di costanti $c > 0$ e $d \in \mathbb{R}$, tali che $aX_1 + bX_2$ e $cX + d$ abbiano la stessa distribuzione.

In pratica si può dire che la ‘forma’ di X si conserva sotto l’operazione di addizione, a meno di un riscaldamento e di una traslazione.

La distribuzione è detta *strettamente stabile* se $d = 0$ per ogni scelta di a e b . Se la distribuzione è simmetrica rispetto allo 0, si dice che è *simmetricamente stabile*.

Per la maggior parte delle distribuzioni stabili, eccetto la distribuzione Gaussiana, quella di Cauchy, e la cosiddetta distribuzione di Lévy_{3/2}, non

c'è una rappresentazione analiticamente chiusa per le funzioni di densità, tuttavia per tutte è definita analiticamente la funzione caratteristica.

Osservazione 3.1. Per il prossimo teorema ci serviremo dei parametri α e β che definiremo più avanti e che, insieme ai parametri γ e δ , servono a descrivere una distribuzione stabile.

Teorema 3.1. *Affinchè una distribuzione sia stabile, è necessario e sufficiente che la sua funzione caratteristica sia data dalla seguente equazione detta rappresentazione canonica delle leggi stabili, a meno di un riscalamento e di una traslazione¹:*

$$\phi(\theta) = \begin{cases} \exp(-c |\theta|^\alpha [1 - i\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2} (\text{sign } \theta)]) & \alpha \neq 1, \\ \exp(-c |\theta| [1 + i\beta \frac{2}{\pi} (\text{sign } \theta) \log |\theta|]) & \alpha = 1 \end{cases} \quad (3.1)$$

per $0 < \alpha \leq 2$, $-1 \leq \beta \leq 1$, e $c \geq 0$ è una costante reale.

Si ha simmetria quando $\beta = 0$, in questi casi la funzione caratteristica ha la semplice forma

$$\phi(\theta) = e^{-c|\theta|^\alpha}. \quad (3.2)$$

Dimostrazione. Per un'idea della dimostrazione si veda [4]. □

3.2 Parametri

Per descrivere una distribuzione stabile si ha bisogno di quattro parametri $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ e si usa scrivere $X \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ per indicare che la variabile aleatoria X ha legge stabile.

1. $\alpha \in (0, 2]$: *parametro di stabilità o esponente caratteristico.*

Ci dice quanto sono spesse le code della distribuzione. Man mano che il valore di α diminuisce le code della distribuzione stabile si fanno via via più spesse e la parte centrale sempre più ‘appuntita’.

¹Qui abbiamo fissato $\delta = 0$ e $\gamma = 1$, rispettivamente parametri di posizione e di scala.

2. $\beta \in [-1, 1]$: *indice di asimmetria*.

Se $\beta = 1$, la maggior parte della distribuzione è sbilanciata verso destra.

Se $\beta = -1$, la maggior parte della distribuzione è sbilanciata verso sinistra.

Se $\beta = 0$, la distribuzione è perfettamente simmetrica.

3. $\gamma \geq 0$: *parametro di scala*.

Ci dice quanto è ‘larga’ o ‘stretta’ una distribuzione.

4. $\delta \in \mathbb{R}$: *parametro di posizione*.

Ci dice dov’è situata la distribuzione sul suo dominio. Se positivo, sposta la distribuzione verso destra, se negativo, la sposta verso sinistra.

Sia α che β sono parametri che determinano la forma effettiva della distribuzione e per questo vengono detti *parametri di forma*. Se $\alpha < 2$ la distribuzione può essere asimmetrica, addirittura concentrata su un semiasse se $\alpha < 1$. I parametri γ e δ , invece, non determinano effettivamente la forma della distribuzione, ma solo il livello di ‘zoom’ con il quale viene vista ed eventualmente il ‘centro’ della distribuzione. C’è da dire inoltre che generalmente $\gamma > 0$, mentre $\gamma = 0$ è usata per denotare una distribuzione degenera totalmente concentrata in δ . Quando $\alpha = 2$ ci si riduce ad una distribuzione normale, in questo caso γ è la deviazione standard (a meno di una radice di due) e δ è la media.

Tutte le distribuzioni con $\alpha < 2$ sono dette *Pareto-stabili*, questo nome è usato per distinguerle dalle distribuzioni normali che decadono lentamente.

Mostriamo di seguito i tre esempi di distribuzioni stabili di cui si conosce l’espressione in forma chiusa delle densità.

Esempio 3.1. Distribuzione normale o Gaussiana.

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ se ha densità

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad -\infty < x < \infty. \quad (3.3)$$

La funzione di distribuzione, per la quale non c'è un'espressione in forma chiusa è

$$F(x) = P(X \leq x) = \Phi((x - \mu)/\sigma),$$

dove $\Phi(z)$ è la probabilità che una variabile aleatoria normale standard sia minore o uguale a z . La distribuzione Gaussiana è stabile con parametri $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $\gamma = \sigma/\sqrt{2}$, $\delta = \mu$.

Se abbiamo delle variabili aleatorie normali allora la media della somma di tali variabili è la somma delle medie degli addendi e la varianza della somma è la somma delle varianze. Sia quindi $X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$, allora $X_1 \sim \mathbf{N}(a\mu, (a\sigma)^2)$, $X_2 \sim \mathbf{N}(b\mu, (b\sigma)^2)$ e $cX + d \sim \mathbf{N}(c\mu + d, (c\sigma)^2)$; per le regole di addizione sopra esposte si dovrà quindi avere $c^2 = a^2 + b^2$ e $d = (a + b - c)\mu$, infatti deve essere: $(a\sigma)^2 + (b\sigma)^2 = (c\sigma)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$ e $a\mu + b\mu = c\mu + d \Rightarrow (a + b - c)\mu = d$.

Esempio 3.2. Distribuzione di Cauchy.

$X \sim \text{Cauchy}(\gamma, \delta)$ se ha densità

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{\gamma^2 + (x - \delta)^2}, \quad -\infty < x < \infty. \quad (3.4)$$

Una distribuzione di Cauchy è stabile con parametri $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

Esempio 3.3. Distribuzione di Lévy a parametro 3/2.

$X \sim \text{Lévy}_{3/2}(\gamma, \delta)$ se ha densità

$$p(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \frac{1}{(x - \delta)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\gamma}{2(x - \delta)}\right), \quad \delta < x < \infty. \quad (3.5)$$

La distribuzione di Lévy è stabile quando $\alpha = 1/2$ e $\beta = 1$.

Sia la distribuzione normale che quella di Cauchy sono simmetriche, ciò che le distingue maggiormente è il 'peso' delle code. Dalla tabella 3.1 si nota, infatti, come sia piccola la probabilità che $X > 3$ nel caso della distribuzione normale, e come invece tale probabilità diventi più significativa nel caso della distribuzione di Cauchy. Le code della distribuzione di Lévy a parametro 3/2

sono ancora più spesse di quelle di Cauchy, inoltre, come si può vedere anche dalla figura 3.1, rispetto alla distribuzione normale e a quella di Cauchy, è fortemente asimmetrica.

La seguente tabella ² ci mostra la probabilità $P(x > c)$, al variare di c , per ognuna delle distribuzioni degli esempi precedenti:

c	$P(X > c)$		
	Normale	Cauchy	Lévy _{3/2}
0	0.5000	0.5000	1.0000
1	0.1587	0.2500	0.6827
2	0.0228	0.1476	0.5205
3	0.001347	0.1024	0.4363
4	0.00003167	0.0780	0.3829
5	0.0000002866	0.0628	0.3453

Tabella 3.1: Comparazione tra le probabilità della coda per la distribuzione normale standard $N(0, 1)$, di Cauchy(1,0) e di Lévy_{3/2}(1,0).

Proposizione 3.1. *Proprietà di riflessione.* Sia $Z \sim S(\alpha, \beta)$ una variabile aleatoria con distribuzione stabile, allora $\forall \alpha, \beta$ $Z(\alpha, -\beta)$ e $-Z(\alpha, \beta)$, hanno la stessa legge di probabilità.

Quindi la densità $p(x)$ e la funzione di distribuzione $F(x)$ della variabile aleatoria $Z(\alpha, \beta)$ sono tali per cui $p_{\alpha, \beta}(x) = p_{\alpha, -\beta}(-x)$ e $F_{\alpha, \beta}(x) = 1 - F_{\alpha, -\beta}(-x)$.

Consideriamo il caso in cui $\beta = 0$, la proprietà di riflessione ci dice che $p_{\alpha, 0}(x) = p_{\alpha, 0}(-x)$, per cui la funzione di densità e la funzione di distribuzione sono simmetriche attorno allo zero. Quando α cresce la forma della densità

²Presa da [6].

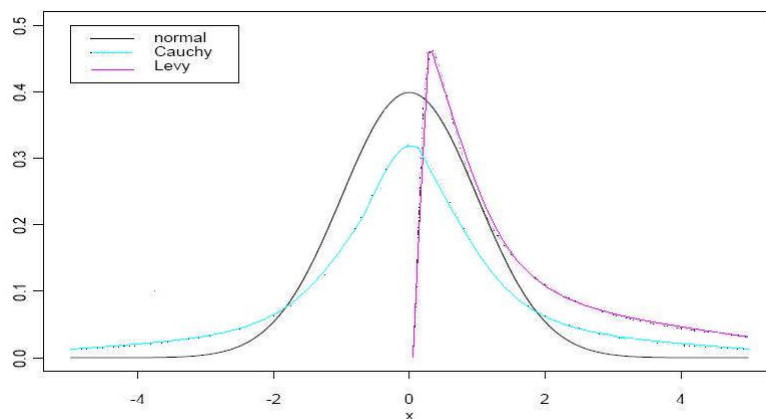


Figura 3.1: Grafici delle densità di una normale standard $N(0, 1)$, di Cauchy(1,0) e di Lévy $_{3/2}(1,0)$.

subisce i seguenti cambiamenti: il ‘picco’ diventa più alto, la regione vicino al picco si abbassa e le code diventano più spesse. Se $\beta > 0$, allora la distribuzione è asimmetrica con la coda destra più spessa rispetto a quella sinistra: $P(X > x) > P(X < -x)$ per valori di $x > 0$ molto grandi. Quando $\beta = 1$, si dice che la distribuzione è totalmente asimmetrica a destra. Dalla proprietà di riflessione, il comportamento del caso in cui $\beta < 0$ riflette il comportamento del caso in cui $\beta > 0$, per cui si avranno code più spesse a sinistra. Quando $\beta = -1$ la distribuzione è totalmente asimmetrica a sinistra.

Quando $\alpha = 2$ come abbiamo già detto la distribuzione è una distribuzione normale, si noti che in questo caso $\tan \frac{\pi\alpha}{2} = 0$ in (3.1) e quindi la funzione caratteristica è reale e la distribuzione è sempre simmetrica, non importa quale sia il valore di β . Per $\alpha \nearrow 2$ le distribuzioni diventano sempre più simmetriche e β meno significativa nelle applicazioni e più difficile da stimare accuratamente.

3.3 Probabilità delle code e momenti

In generale, ad eccezione di pochi casi, tra cui quelli che abbiamo visto nella sezione precedente, non si riesce a calcolare esplicitamente l'antitrasformata di $\phi(\theta)$ in (3.1) e ad avere quindi un'espressione chiusa per la funzione di densità. Tuttavia si possono ottenere importanti informazioni sull'andamento asintotico delle code di una distribuzione stabile sviluppando la funzione caratteristica $\phi(\theta)$ per $\theta \rightarrow 0$.³ Tale sviluppo fa acquistare alla funzione caratteristica una forma più semplice che facilita il compito di effettuare l'antitrasformata, si ottiene così il seguente risultato⁴:

Teorema 3.2. (Approssimazione della coda) *Sia $X \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, con $0 < \alpha < 2$, $-1 < \beta \leq 1$.*

Allora per $x \rightarrow \infty$,

$$P(X > x) \sim \gamma^\alpha c_\alpha (1 + \beta) x^{-\alpha} \quad (3.6)$$

$$p_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}(x) \sim \alpha \gamma^\alpha c_\alpha (1 + \beta) x^{-(\alpha+1)}, \quad (3.7)$$

dove $c_\alpha = \sin(\frac{\pi\alpha}{2})\Gamma(\alpha)/\pi$. Usando la proprietà di riflessione, possiamo dire che per $-1 \leq \beta < 1$, per $x \rightarrow \infty$ vale

$$P(X < -x) \sim \gamma^\alpha c_\alpha (1 - \beta) x^{-\alpha} \quad (3.8)$$

$$p_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}(-x) \sim \alpha \gamma^\alpha c_\alpha (1 - \beta) x^{-(\alpha+1)}. \quad (3.9)$$

Per la dimostrazione si veda [3].

³Ricordiamo che il comportamento della serie di Fourier (o trasformata) di una successione (o funzione) vicino all'origine, riflette il comportamento della successione (funzione) all'infinito.

⁴ $h(x) \sim g(x)$ per $x \rightarrow z$ significherà qui e nel seguito, $\lim_{x \rightarrow z} \frac{h(x)}{g(x)} = 1$.

Come si vede quindi il parametro α caratterizza il comportamento di tali distribuzioni per grandi valori di x . Per $\alpha < 2$ e $-1 < \beta < 1$ entrambe le probabilità delle code e le densità sono asintoticamente delle leggi di potenza, così non è quando $\beta = 1$ e $\beta = -1$, in cui la coda destra e la coda sinistra rispettivamente, non sono asintoticamente leggi di potenza.

Le distribuzioni con code spesse sono caratterizzate dal fatto che non tutti i momenti sono finiti. Solitamente i due parametri più importanti per descrivere una distribuzione sono i valori della media $E(x)$ e della varianza $\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$, tuttavia per distribuzioni con code grasse questi primi due momenti non sono utili a descriverle in quanto gli integrali di tali aspettative divergono. Al loro posto spesso si usano i *momenti assoluti frazionari*:

$$E(|X|^p) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^p f(x) dx, \quad (3.10)$$

dove p è un numero reale.

Studiando la convergenza di (3.10) per $0 < \alpha < 2$, si vede che $E(|X|^p)$ è finito per $0 < p < \alpha$ e che $E(|X|^p) = +\infty$ per $p \geq \alpha$.

Così per $0 < \alpha < 2$, $E(|X|^2) = E(X^2) = +\infty$ e la distribuzione non ha secondo momento finito, cioè non ha varianza finita. Inoltre per $1 < \alpha \leq 2$, $E(|X|) < \infty$, mentre $E(|X|) = \infty$ per $\alpha \leq 1$, in questo caso quindi la media è indefinita.

Capitolo 4

Cammini aleatori con varianza infinita

4.1 Voli di Lévy

I voli di Lévy sono cammini aleatori, e come tali possono essere definiti come la somma di incrementi aleatori (lunghezza dei salti) indipendenti e identicamente distribuiti. Tali incrementi hanno varianza infinita e quindi le loro distribuzioni hanno code grasse e per loro non vale il teorema del limite centrale.¹

Se la varianza di ogni salto è infinita, anche la varianza di n salti sarà infinita, questo comportamento implica che la distribuzione di probabilità di n salti ha forma simile a quella della distribuzione di probabilità di ogni singolo salto. Questa proprietà è tipica dei *frattali* in cui uno stesso schema contiene repliche in miniatura di se stesso, ovvero vengono riproposti innumerevoli sequenze di motivi identici ma su scala diversa (proprietà dell'*auto-similarità*). In un volo di Lévy la lunghezza tipica dei salti non è costante. Il lento decadimento delle code significa che è alta la probabilità che si verifichino grandi salti e in questo caso il tempo tra salti ampi e salti piccoli è costante. Nel

¹Un esempio sono le distribuzioni stabili simmetriche che abbiamo trattato nel Capitolo 3.

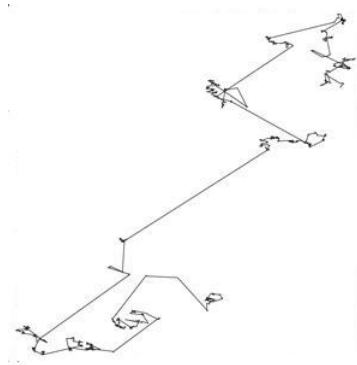


Figura 4.1: Un tipico volo di Lévy bi-dimensionale. In questo volo di Lévy la direzione dei passi è isotropa.

caso dei voli di Lévy il ‘camminatore’ visita solo il punto iniziale e finale del salto, ma non il tratto che c’è tra il punto di partenza e il punto di arrivo del salto e il concetto di velocità non entra in gioco.

Restrizione: Da qui in avanti tratteremo voli di Lévy di dimensione uno.

Osservazione 4.1. I voli di Lévy si distinguono da un’altra classe di processi, detti *cammini di Lévy*, in cui un ‘camminatore’ segue una traiettoria uguale a quella del volo, ma si muove, con velocità costante, visitando tutti i siti intermedi tra il punto iniziale e il punto finale dello spostamento.

La distribuzione dei singoli salti di un volo di Lévy di dimensione uno è,

$$P(\xi \leq x) \approx x^{-\alpha} \quad (4.1)$$

e

$$p(x) \approx x^{-(\alpha+1)} \quad (4.2)$$

con $0 < \alpha < 2$.

La posizione dopo n passi indipendenti e identicamente distribuiti, sarà

$$X_n = \sum_{k=1}^n \xi_k \quad (4.3)$$

La frequenza relativa delle occorrenze dei grandi incrementi positivi e negativi nella somma (4.3) determina il grado di simmetria della distribuzione che identifica il volo.

Consideriamo ora il caso particolare di una distribuzione continua, in cui la funzione di densità $p(x)$ degli ξ_k è stabile (escludiamo i casi $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$). Sia quindi $p(x)$ la funzione di densità degli ξ_k e $p_n(x)$ la funzione di densità di n spostamenti. Facciamo un'ulteriore restrizione e consideriamo tali distribuzioni simmetriche, siano allora $\phi(\theta) = e^{-c|\theta|^\alpha}$ e $\phi_n(\theta) = e^{-c_n|\theta|^\alpha}$ (dove $c_n = nc$) le funzioni caratteristiche di $p(x)$ e $p_n(x)$ rispettivamente. Facendo l'inversa della trasformata di Fourier, si ha

$$p_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta x} e^{-nc|\theta|^\alpha} \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Ora facciamo un cambio di variabile

$$\omega = \theta n^{1/\alpha} \Rightarrow |\omega|^\alpha = |\theta|^\alpha n,$$

e introduciamo

$$\psi = \frac{x}{n^{1/\alpha}}.$$

Allora si ha

$$p_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\psi} e^{-c|\omega|^\alpha} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{n^{1/\alpha}}$$

che è una distribuzione stabile scalata:

$$p_n(x) = \frac{1}{n^{1/\alpha}} p\left(\frac{x}{n^{1/\alpha}}\right) \quad (4.4)$$

Quindi l'ampiezza della distribuzione $\sim n^{1/\alpha}$ ².

Così per $\alpha < 2$ ($\alpha \neq 1$) abbiamo $n^{1/\alpha} \gg \sqrt{n}$, si ha quindi il comportamento caratteristico di un processo di superdiffusione, quale è un volo di Lévy.

4.2 Distribuzioni limite

Vogliamo studiare la distribuzione limite della seguente somma normalizzata

$$\eta_n = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n - A_n}{B_n} \quad (4.5)$$

di variabili aleatorie ξ_1, \dots, ξ_n *indipendenti e identicamente distribuite*, cioè $P(\xi_1 \leq x) = P(\xi_2 \leq x) = \dots = P(\xi_n \leq x) = F(x)$.

Lo studio delle distribuzioni stabili nel precedente capitolo è di fondamentale importanza nello studio delle distribuzioni limiti, come si può vedere dal seguente teorema

Teorema 4.1. *Affinchè la funzione di distribuzione $F(x)$ sia una distribuzione limite per la somma (4.5) di variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite è necessario e sufficiente che sia stabile.*

Sarà il teorema generalizzato del limite centrale, della cui dimostrazione proponiamo una nostra versione, a mostrarci che la distribuzione limite di una somma di variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite è stabile³. Per il viceversa riportiamo invece la seguente dimostrazione:

Dimostrazione. Dimostriamo quindi la condizione di sufficienza, cioè che ogni legge stabile è il limite di una funzione di distribuzione delle somme del tipo (4.5). Questo fatto si deduce facilmente dalla definizione di legge stabile.

²In questo esempio si vede che il giusto ‘scaling’, per la somma di variabili aleatorie i.i.d con varianza infinita, di cui studieremo la distribuzione limite nel Teorema del Limite Generalizzato (sezione 4.3), è $n^{1/\alpha}$.

³Per una differente dimostrazione della necessità si veda [4].

Infatti siano ξ_k , con $k = 1, 2, \dots$, indipendenti e identicamente distribuite secondo la legge stabile $F(x)$, allora la somma $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, per la definizione di legge stabile, è distribuita secondo la legge $F(a_n x + b_n)$ e così la distribuzione della variabile

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{a_n} - \frac{b_n}{a_n}$$

sarà $F(x)$. Quindi abbiamo visto che se $F(x)$ è stabile allora sarà anche limite di una somma di variabili indipendenti e identicamente distribuite. \square

Definizione 4.1. Siano $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, variabili aleatorie con la stessa funzione di distribuzione $F(x)$, se per una scelta adeguata delle costanti A_n e B_n , la funzione di distribuzione della somma in (4.5) converge per $n \rightarrow \infty$ alla funzione di distribuzione $G(x)$, diciamo che $F(x)$ appartiene al *dominio di attrazione* della legge $G(x)$.

Osservazione 4.2. Dal teorema 4.1 si deduce che tutte le leggi stabili, e solo quelle, hanno un dominio di attrazione non vuoto. C'è da notare inoltre che mentre la distribuzione normale attrae un'ampia classe di distribuzioni di probabilità, per esempio tutte quelle che decrescono almeno come $x^{-3-\epsilon}$ ($\epsilon > 0$), invece il dominio di attrazione delle altre leggi stabili è costituito solo di quelle distribuzioni il cui carattere richiama il carattere della legge che attrae.

4.3 Teorema del limite generalizzato

Come abbiamo visto nel secondo capitolo, il Teorema del Limite Centrale si applica alla somma, adeguatamente scalata, di variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite con varianza finita, e ci dice che tale somma converge debolmente alla distribuzione gaussiana. Nel caso di variabili aleatorie con varianza infinita questo risultato non è più valido, dobbiamo quindi considerare un diverso teorema, il Teorema del Limite Generalizzato, che ci darà una differente distribuzione limite.

Partendo da una dimostrazione di tale teorema nel libro di Koralov-Sinai ([2]), data però solo per il caso particolare di distribuzioni simmetriche e continue, abbiamo lavorato ad una nostra dimostrazione per distribuzioni più generali. Abbiamo dapprima dimostrato tale teorema per distribuzioni continue e successivamente siamo tornati a considerare variabili aleatorie a valori in \mathbb{Z} , dimostrando quindi il teorema per distribuzioni discrete.

Consideriamo allora una successione di variabili aleatorie i.i.d., ξ_1, ξ_2, \dots con varianza infinita, e sia $p(x)$ la densità di probabilità su \mathbb{R} della loro distribuzione. Definiamo $p(x)$ come somma della sua parte pari $p_+(x)$ e della sua parte dispari $p_-(x)$:

$$p(x) = p_+(x) + p_-(x) = \frac{p(x) + p(-x)}{2} + \frac{p(x) - p(-x)}{2}.$$

Facciamo le seguenti ipotesi.

Per $x \rightarrow +\infty$,

$$p_{\pm}(x) \sim \frac{a_{\pm}}{x^{\alpha_{\pm}+1}}, \quad (4.6)$$

dove $a_+ > 0$, $a_- \neq 0$ e $\alpha \in (0, 2)$. Questo vuol dire che esistono due costanti $M_{\pm} > 0$ (senza perdere di generalità possiamo considerare $M := \max\{M_+, M_-\}$) tali che, $\forall x \geq M$,

$$p_{\pm}(x) = \frac{a_{\pm}}{x^{\alpha_{\pm}+1}}(1 + g_{\pm}(x)), \quad (4.7)$$

dove $g_{\pm}(x)$ è limitata e $g_{\pm}(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$.

Per $x \rightarrow -\infty$, invece si ha

$$p_{\pm}(x) \sim \pm \frac{a_{\pm}}{|x|^{\alpha_{\pm}+1}}, \quad (4.8)$$

ovvero per $x \leq -M$ si ha

$$p_{\pm}(x) = \pm \frac{a_{\pm}}{|x|^{\alpha_{\pm}+1}}(1 + g_{\pm}(x)), \quad (4.9)$$

dove, come prima, $g_{\pm}(x)$ è limitata e $g_{\pm}(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow -\infty$.

Osservazione 4.3. Notiamo che deve essere $\alpha_+ \leq \alpha_-$, infatti se fosse $\alpha_- < \alpha_+$, allora

1. per $a_- > 0$ e $x \rightarrow -\infty$, si avrebbe

$$p(x) = p_+(x) + p_-(x) \sim \frac{a_+}{x^{\alpha_++1}} - \frac{a_-}{|x|^{\alpha_-+1}} \sim \frac{-a_-}{|x|^{\alpha_-+1}},$$

e

2. per $a_- < 0$ e $x \rightarrow \infty$, si avrebbe

$$p(x) = p_+(x) + p_-(x) \sim \frac{a_+}{x^{\alpha_++1}} - \frac{a_-}{|x|^{\alpha_-+1}} \sim \frac{-a_-}{|x|^{\alpha_-+1}},$$

Il caso 1 o il caso 2 sono impossibili perchè $p(x)$ è una funzione di densità di probabilità e come tale deve essere $p(x) \geq 0$.

Definiamo $\alpha_+ = \alpha$.

Definiamo ora le trasformate di Fourier di $p_+(x)$ e $p_-(x)$:

$$\phi_{\pm}(\theta) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\theta x} p_{\pm}(x) dx,$$

Si noti che ϕ_+ è pari e ha valori reali (poichè è la trasformata di Fourier di una funzione pari), mentre ϕ_- è dispari e ha valori immaginari (poichè è la trasformata di Fourier di una funzione dispari). Quindi se $\phi(\theta)$ è la trasformata di Fourier di $p(x)$, ovvero la sua funzione caratteristica, allora, essendo la trasformata di Fourier lineare si ha:

$$\phi(\theta) = \phi_+(\theta) + \phi_-(\theta).$$

Consideriamo ora la somma normalizzata, data in (4.5):

$$\eta_n = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n - A_n}{B_n}, \quad (4.10)$$

con $B_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$ e $A_n = n\mu$, dove

1. Se $\alpha_+ < \alpha_-$

$$\mu = \begin{cases} E(\xi_1) = \int_{\mathbb{R}} xp(x)dx, & \text{per } \alpha \in (1, 2) \\ 0, & \text{per } \alpha \in (0, 1] \end{cases}$$

2. Se $\alpha_+ = \alpha_-$

$$\mu = \begin{cases} E(\xi_1) = \int_{\mathbb{R}} xp(x)dx, & \text{per } \alpha \in (1, 2) \\ 0, & \text{per } \alpha \in (0, 1) \end{cases}$$

Teorema 4.2. *Per $n \rightarrow \infty$, la distribuzione di η_n converge debolmente alla distribuzione limite la cui funzione caratteristica è $\Phi(\theta) = e^{-C\theta^\alpha}$, per $\theta > 0$ e $\Phi(\theta) = e^{-\bar{C}|\theta|^\alpha}$, per $\theta < 0$, dove C è una costante che dipende da a_+ , a_- e α e \bar{C} è il suo complesso coniugato.*

Per provare questo teorema abbiamo bisogno di una serie di lemmi, che enunciamo e dimostriamo di seguito.

Lemma 4.1. Sia $\alpha \in (0, 2)$, allora per $\theta \rightarrow 0^+$,

$$\phi_+(\theta) = 1 - C_+\theta^\alpha + o(\theta^\alpha), \quad (4.11)$$

dove $C_+ = C_+(a_+, \alpha) > 0$.

Per la dimostrazione si veda [2].

Osservazione 4.4. Nei seguenti lemmi non viene trattato il caso $\alpha_- = 1$.

Lemma 4.2. Assumiamo $\alpha_- \in (1, 2)$ e

$$\mu := E(\xi_1) = \int_{\mathbb{R}} xp(x)dx = \int_{\mathbb{R}} xp_-(x)dx = 0.$$

Allora per $\theta \rightarrow 0^+$,

$$\phi_-(\theta) = iC_-\theta^{\alpha_-} + o(\theta^{\alpha_-}),$$

dove $C_- = C_-(a_-, \alpha_-)$.

Dimostrazione. Consideriamo $p_-(x)$ come in (4.7) e (4.9) e prendiamo θ in modo tale che sia $\theta < 1/M$; spezziamo l'integrale che definisce $\phi_-(\theta)$, in cinque parti:

$$\begin{aligned} \phi_-(\theta) &= \int_{-\infty}^{-1/\theta} p_-(x)e^{i\theta x}dx + \int_{-1/\theta}^{-M} p_-(x)e^{i\theta x}dx + \int_{-M}^M p_-(x)e^{i\theta x}dx + \\ &\quad + \int_M^{1/\theta} p_-(x)e^{i\theta x}dx + \int_{1/\theta}^{\infty} p_-(x)e^{i\theta x}dx = \\ &= I_1(\theta) + I_2(\theta) + I_3(\theta) + I_4(\theta) + I_5(\theta). \end{aligned} \tag{4.12}$$

L'integrale $I_3(\theta)$ è una funzione analitica di θ , infatti è la trasformata di Fourier di $\chi_{[-M,M]}p_-(x)$ che è una funzione a supporto compatto. Possiamo quindi svilupparla in serie di Taylor:

$$I_3(0) = \int_{-M}^M p_-(x)dx,$$

$$I_3'(0) = \theta \int_{-M}^M p_-(x)ixdx.$$

$I_3(0) = 0$ poichè $p_-(x)$ una funzione dispari, per cui possiamo scrivere:

$$I_3(\theta) = \theta \int_{-M}^M p_-(x)ixdx + O(\theta^2) \quad \text{per } \theta \rightarrow 0.$$

Da questo momento in poi scriveremo per semplicità g al posto di g_- .

Utilizzando il cambio di variabile $x = y/\theta$ e la convergenza dominata otteniamo

$$\begin{aligned} I_1(\theta) &= \int_{-\infty}^{-1/\theta} p_-(x) e^{i\theta x} dx = - \int_{-\infty}^{-1/\theta} \frac{a_-(1+g(x))}{|x|^{\alpha_-+1}} e^{i\theta x} dx = \\ &= -a_- \theta^{\alpha_-} \int_{-\infty}^{-1} \frac{(1+g(y/\theta))}{|y|^{\alpha_-+1}} e^{iy} dy \sim -a_- \theta^{\alpha_-} \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{iy}}{|y|^{\alpha_-+1}} dy. \end{aligned}$$

Per $I_5(\theta)$ si ha

$$\begin{aligned} I_5(\theta) &= \int_{1/\theta}^{+\infty} p_-(x) e^{i\theta x} dx = \int_{1/\theta}^{+\infty} \frac{a_-(1+g(x))}{x^{\alpha_-+1}} e^{i\theta x} dx = \\ &= a_- \theta^{\alpha_-} \int_1^{+\infty} \frac{(1+g(y/\theta))}{y^{\alpha_-+1}} e^{iy} dy \sim a_- \theta^{\alpha_-} \int_1^{+\infty} \frac{e^{iy}}{y^{\alpha_-+1}} dy. \end{aligned}$$

Ora

$$I_2(\theta) + I_4(\theta) = \int_{-1/\theta}^{-M} p_-(x) (e^{i\theta x} - 1 - i\theta x) dx + \int_M^{1/\theta} p_-(x) (e^{i\theta x} - 1 - i\theta x) dx +$$

$$\int_{-1/\theta}^{-M} p_-(x) i\theta x dx + \int_M^{1/\theta} p_-(x) i\theta x dx \quad (4.13)$$

si noti che poichè $p_-(x)$ è dispari, $\int_{-1/\theta}^{-M} p_-(x) dx$ si annulla con $\int_M^{1/\theta} p_-(x) dx$.

Consideriamo gli ultimi due integrali di (4.13)

$$\begin{aligned} i\theta \int_{-1/\theta}^{-M} p_-(x) x dx + i\theta \int_M^{1/\theta} p_-(x) x dx &= \\ i\theta \int_{-1/\theta}^{1/\theta} p_-(x) x dx - i\theta \int_{-M}^M p_-(x) x dx. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Ora

$$\begin{aligned} i\theta \int_{-1/\theta}^{1/\theta} p_-(x)xdx &= i\theta \int_{-\infty}^{\infty} p_-(x)xdx - i\theta \int_{-\infty}^{-1/\theta} p_-(x)xdx - i\theta \int_{1/\theta}^{\infty} p_-(x)xdx \\ &= J_1 - J_2 - J_3 = J_1 - 2J_3, \end{aligned}$$

l'ultima uguaglianza deriva dalla parità della funzione $p_-(x)x$.

Per ipotesi fatta $\mu = 0$, per cui risulta $J_1 = 0$. Consideriamo quindi J_3 , usando come prima il cambiamento di variabile $x = y/\theta$ e considerando che $p_-(x)x$ è una funzione pari, si ha

$$J_3 = i\theta \int_{1/\theta}^{\infty} p_-(x)xdx = i\theta^{\alpha_-} \int_1^{\infty} \frac{a_-(1 + g(y/\theta))}{y^{\alpha_-}} dy \sim ia_-\theta^{\alpha_-} \int_1^{\infty} \frac{1}{y^{\alpha_-}} dy.$$

L'ultimo integrale di (4.14), $-i\theta \int_{-M}^M p_-(x)xdx$, si elimina con $i\theta \int_{-M}^M p_-(x)xdx$ di $I_3(\theta)$.

Per quanto riguarda i primi due integrali di (4.13), ragioniamo come segue. Sappiamo che $g(x) \rightarrow 0$ per $|x| \rightarrow \infty$, allora fissato ϵ , $\exists M = M(\epsilon)$, sufficientemente grande, tale che $\max_{x \in [M, \infty]} g(x) \leq \epsilon$. Considerando il secondo integrale di (4.13) e facendo il cambiamento di variabili $x = y/\theta$, otteniamo

$$\int_M^{1/\theta} p_-(x)(e^{i\theta x} - 1 - i\theta x)dx = a_-\theta^{\alpha_-} \int_{M\theta}^1 \frac{(1 + g(y/\theta))}{y^{\alpha_-+1}} (e^{iy} - 1 - iy)dy.$$

Ora

$$\begin{aligned} &a_-\theta^{\alpha_-} \int_{M\theta}^1 \frac{1 + g(y/\theta)}{y^{\alpha_-+1}} (e^{iy} - 1 - iy)dy = \\ &a_- \left(\theta^{\alpha_-} \int_0^1 \frac{e^{iy} - 1 - iy}{y^{\alpha_-+1}} dy + \theta^{\alpha_-} \int_{M\theta}^1 \frac{g(y/\theta)}{y^{\alpha_-+1}} (e^{iy} - 1 - iy)dy - \int_0^{M\theta} \frac{e^{iy} - 1 - iy}{y^{\alpha_-+1}} dy \right). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Il primo integrale del membro di destra della (4.15) è integrabile in 0, così come il terzo (che va a zero per $\theta \rightarrow 0$), perchè in un intorno dello 0 vale

$$\frac{e^{iy} - 1 - iy}{y^{\alpha_-+1}} \sim i \frac{1}{y^{\alpha_- - 1}},$$

la cui integrazione in 0 non dà problemi, essendo $\alpha_- - 1 < 1$. Sia ora

$$\zeta_M^{(1)}(\theta) = \theta^{\alpha_-} \int_{M\theta}^1 \frac{g(y/\theta)}{y^{\alpha_-+1}} (e^{iy} - 1 - iy) dy,$$

allora

$$\left| \frac{\zeta_M^{(1)}(\theta)}{\theta^{\alpha_-}} \right| \leq \max_{x \in [M, \frac{1}{\theta}]} g(x) \int_{M\theta}^1 \frac{|e^{iy} - 1 - iy|}{y^{\alpha_-+1}} dy \leq \max_{x \in [M, \infty]} g(x) \int_0^1 \frac{Ky^2}{y^{\alpha_-+1}} dy,$$

dove abbiamo usato il fatto che $|e^{iy} - 1 - iy| \leq Ky^2$, per $y \in [0, 1]$. Ora, eventualmente scegliendo un M più grande, possiamo supporre che

$$\max_{x \in [M, \infty]} g(x) \leq \frac{\epsilon}{K \int_0^1 y^{-(\alpha_-+1)} dy},$$

da cui

$$\left| \zeta_M^{(1)}(\theta) \right| \leq \epsilon \theta^{\alpha_-}.$$

Facendo lo stesso ragionamento per il primo integrale di (4.13), otteniamo, con il solito cambiamento di variabile

$$\begin{aligned} \int_{-1/\theta}^{-M} p_-(x) (e^{i\theta x} - 1 - i\theta x) dx &= -a_- \theta^{\alpha_-} \int_{-1}^{-M\theta} \frac{(1 + g(y/\theta))}{y^{\alpha_-+1}} (e^{iy} - 1 - iy) dy = \\ &= -a_- \left(\theta^{\alpha_-} \int_{-1}^0 \frac{(e^{iy} - 1)}{|y|^{\alpha_-+1}} dy + \theta^{\alpha_-} \int_{-1}^{-M\theta} \frac{g(y/\theta)}{|y|^{\alpha_-+1}} (e^{iy} - 1) dy - \theta^{\alpha_-} \int_{-M\theta}^0 \frac{(e^{iy} - 1)}{|y|^{\alpha_-+1}} dy \right). \end{aligned}$$

Sia quindi

$$\zeta_M^{(2)}(\theta) = \theta^{\alpha_-} \int_{-1}^{-M\theta} \frac{g(y/\theta)}{|y|^{\alpha_-+1}} (e^{iy} - 1 - iy) dy,$$

come prima possiamo dire che

$$\left| \zeta_M^{(2)}(\theta) \right| \leq \epsilon \theta^{\alpha_-}.$$

In conclusione, prendendo in considerazione il comportamento asintotico di ogni termine, e considerando che

$$\phi_-(\theta) = I_1(\theta) + I_2(\theta) + I_3(\theta) + I_4(\theta) + I_5(\theta),$$

si ha che $\forall \epsilon > 0$, $\exists \bar{\theta} = \bar{\theta}(\epsilon)$, tale che $\forall \theta < \bar{\theta}$, vale

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\theta^{\alpha_-}} |\phi_-(\theta) - i\theta^{\alpha_-} (-\frac{1}{i}a_- \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{iy}}{|y|^{\alpha_-+1}} dy + \frac{1}{i}a_- \int_1^{+\infty} \frac{e^{iy}}{y^{\alpha_-+1}} dy - \\ & - 2a_- \int_1^{\infty} \frac{1}{y^{\alpha_-}} dy + \int_0^1 \frac{e^{iy} - 1 - iy}{y^{\alpha_-+1}} dy - \int_{-1}^0 \frac{e^{iy} - 1 - iy}{|y|^{\alpha_-+1}} dy)| = \\ & \frac{1}{\theta^{\alpha_-}} |\phi_-(\theta) - i\theta^{\alpha_-} (a_- \int_1^{\infty} \frac{2 \sin y}{y^{\alpha_-+1}} dy - 2a_- \int_1^{\infty} \frac{1}{y^{\alpha_-}} dy + \\ & \int_0^1 \frac{e^{iy} - 1 - iy}{y^{\alpha_-+1}} dy - \int_{-1}^0 \frac{e^{iy} - 1 - iy}{|y|^{\alpha_-+1}} dy)| = \\ & \frac{|\zeta_M^{(1)}(\theta)|}{\theta^{\alpha_-}} + \frac{|\zeta_M^{(2)}(\theta)|}{\theta^{\alpha_-}} + o(1) \leq 3\epsilon. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Sia

$$a_- \int_1^{\infty} \frac{2 \sin y}{y^{\alpha_-+1}} dy - 2a_- \int_1^{\infty} \frac{1}{y^{\alpha_-}} dy + \int_0^1 \frac{e^{iy} - 1 - iy}{y^{\alpha_-+1}} dy - \int_{-1}^0 \frac{e^{iy} - 1 - iy}{|y|^{\alpha_-+1}} dy = C_-, \quad (4.17)$$

allora, per la (4.46) e la (4.47), vale

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \left| \frac{\phi_-(\theta) - iC_- \theta^{\alpha_-}}{\theta^{\alpha_-}} \right| = 0$$

ovvero

$$\phi_-(\theta) = iC_- \theta^{\alpha_-} + o(\theta^{\alpha_-}).$$

□

Corollario 4.1. Per $\alpha_- \in (1, 2)$ e $\mu \neq 0$, si ha che, per $\theta \rightarrow 0^+$, $\phi(\theta) = e^{i\mu\theta} (1 - C_+^\mu \theta^{\alpha_-} + iC_-^\mu \theta^{\alpha_-} + o(\theta^{\alpha_-}))$, dove C_+^μ, C_-^μ vengono dai lemmi precedenti applicati però alla distribuzione $p^\mu(x) := p(x + \mu)$.

Dimostrazione. In questo caso $\mu \neq 0$, abbiamo quindi

$$\mu := E(\xi_1) = \int_{\mathbb{R}} xp(x)dx \neq 0. \quad (4.18)$$

Definiamo

$$p^\mu(x) = p(x + \mu), \quad (4.19)$$

allora la funzione caratteristica di $p^\mu(x)$ sarà

$$\phi^\mu(\theta) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\theta x} p(x + \mu) dx =$$

facendo il cambio di variabili: $x + \mu = y$,

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\theta(y-\mu)} p(y) dy = e^{-i\theta\mu} \int_{\mathbb{R}} e^{i\theta y} p(y) dy = \\ &= e^{-i\theta\mu} \phi(\theta). \end{aligned}$$

Da cui

$$\phi(\theta) = e^{i\theta\mu} \phi^\mu(\theta) = e^{i\theta\mu} (1 - C_+^\mu \theta^{\alpha_-} + iC_-^\mu \theta^{\alpha_-} + o(\theta^{\alpha_-})). \quad (4.20)$$

□

Lemma 4.3. Assumiamo $\alpha_- \in (0, 1)$. Allora per $\theta \rightarrow 0^+$,

$$\phi_-(\theta) = iC_- \theta^{\alpha_-} + o(\theta^{\alpha_-}), \quad (4.21)$$

dove $C_- = C_-(a_-, \alpha_-)$.

Dimostrazione. In questo caso, essendo $\alpha_- \in (0, 1)$, $E(x)$ o non esiste o, se esiste, è infinito.

Come abbiamo già detto $g(x) \rightarrow 0$, per $|x| \rightarrow \infty$, per cui fissato ϵ , $\exists M = M(\epsilon)$, sufficientemente grande, tale che $\max_{x \in [M, \infty]} g(x) \leq \epsilon$. Come nel lemma precedente prendiamo $\theta < 1/M$ e sia

$$\begin{aligned}
\phi_-(\theta) &= \int_{-\infty}^{-1/\theta} p_-(x) e^{i\theta x} dx + \int_{-1/\theta}^{-M} p_-(x) e^{i\theta x} dx + \int_{-M}^M p_-(x) e^{i\theta x} dx + \\
&\quad + \int_M^{1/\theta} p_-(x) e^{i\theta x} dx + \int_{1/\theta}^{\infty} p_-(x) e^{i\theta x} dx = \\
&= I_1(\theta) + I_2(\theta) + I_3(\theta) + I_4(\theta) + I_5(\theta).
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Sviluppiamo $I_3(\theta)$ in serie di Taylor e come prima nel lemma 4.2, essendo $p_-(x)$ dispari, avremo

$$I_3(0) = \int_{-M}^M p_-(x) dx = 0.$$

Ridefinendo

$$\psi_M^1(\theta) = I_3(\theta), \tag{4.23}$$

vediamo che fissato M , $\exists C_M$, tale che $|\psi_M^1(\theta)| \leq C_M \theta$, in un intorno di $\theta = 0$. Ora, $\exists \bar{\theta}$ funzione di ϵ e di M e quindi, in definitiva, funzione della sola ϵ , tale che $\forall \theta < \bar{\theta}$, $|\psi_M^1(\theta)|/\theta^{\alpha_-} \leq C_M/\theta^{\alpha_- - 1} \leq \epsilon$. Da cui $|\psi_M^1(\theta)| \leq \epsilon \theta^{\alpha_-}$.

Per $I_1(\theta)$ e $I_5(\theta)$ come prima abbiamo

$$\begin{aligned}
I_1(\theta) &= \int_{-\infty}^{-1/\theta} p_-(x) e^{i\theta x} dx = - \int_{-\infty}^{-1/\theta} \frac{a_-(1+g(x))}{|x|^{\alpha_-+1}} e^{i\theta x} dx = \\
&= -a_- \theta^{\alpha_-} \int_{-\infty}^{-1} \frac{(1+g(y/\theta))}{|y|^{\alpha_-+1}} e^{iy} dy \sim -a_- \theta^{\alpha_-} \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{iy}}{|y|^{\alpha_-+1}} dy
\end{aligned}$$

Per $I_5(\theta)$ si ha

$$\begin{aligned}
I_5(\theta) &= \int_{1/\theta}^{+\infty} p_-(x) e^{i\theta x} dx = \int_{1/\theta}^{+\infty} \frac{a_-(1+g(x))}{x^{\alpha_-+1}} e^{i\theta x} dx = \\
&= a_- \theta^{\alpha_-} \int_1^{+\infty} \frac{(1+g(y/\theta))}{y^{\alpha_-+1}} e^{iy} dy \sim a_- \theta^{\alpha_-} \int_1^{+\infty} \frac{e^{iy}}{y^{\alpha_-+1}} dy
\end{aligned}$$

Ora

$$I_2(\theta) + I_4(\theta) = \int_{-1/\theta}^{-M} p_-(x)(e^{i\theta x} - 1)dx + \int_M^{1/\theta} p_-(x)(e^{i\theta x} - 1)dx \quad (4.24)$$

Consideriamo il secondo integrale a destra dell'uguaglianza in (4.24), facendo il solito cambiamento di variabili $x = y/\theta$, otteniamo

$$\begin{aligned} \int_M^{1/\theta} p_-(x)(e^{i\theta x} - 1)dx &= a_- \theta^{\alpha_-} \int_{M\theta}^1 \frac{1 + g(y/\theta)}{y^{\alpha_-+1}} (e^{iy} - 1)dy = \\ &= a_- \left(\theta^{\alpha_-} \int_0^1 \frac{(e^{iy} - 1)}{y^{\alpha_-+1}} dy + \theta^{\alpha_-} \int_{M\theta}^1 \frac{g(y/\theta)}{y^{\alpha_-+1}} (e^{iy} - 1)dy - \theta^{\alpha_-} \int_0^{M\theta} \frac{(e^{iy} - 1)}{y^{\alpha_-+1}} dy \right). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Il primo integrale della (4.25) è integrabile in 0, così come il terzo (che va a zero per $\theta \rightarrow 0$), perchè in un intorno dello zero vale

$$\frac{e^{iy} - 1}{y^{\alpha_-+1}} \sim i \frac{1}{y^{\alpha_-}},$$

la cui integrazione in zero non dà problemi, essendo $0 < \alpha_- < 1$. Sia

$$\psi_M^{(2)}(\theta) = \theta^{\alpha_-} \int_{M\theta}^1 \frac{g(y/\theta)}{y^{\alpha_-+1}} (e^{iy} - 1)dy,$$

allora

$$\left| \frac{\psi_M^{(2)}(\theta)}{\theta^{\alpha_-}} \right| \leq \max_{x \in [M, \frac{1}{\theta}]} g(x) \int_{M\theta}^1 \frac{1}{y^{\alpha_-+1}} (e^{iy} - 1)dy \leq \max_{x \in [M, \infty]} g(x) \int_0^1 \frac{Ky}{y^{\alpha_-+1}} dy.$$

dove abbiamo usato il fatto che $|e^{iy} - 1| \leq Ky$, per $y \in [0, 1]$. Ora, eventualmente scegliendo un M più grande, possiamo supporre che

$$\max_{x \in [M, \infty]} g(x) \leq \frac{\epsilon}{K \int_0^1 y^{-\alpha_-} dy},$$

da cui

$$\left| \psi_M^{(2)}(\theta) \right| \leq \epsilon \theta^{\alpha_-}.$$

Facciamo lo stesso ragionamento per il primo integrale di (4.24); attuando il solito cambio di variabile, possiamo dire che

$$\begin{aligned} \int_{-1/\theta}^{-M} p_{-}(x)(e^{i\theta x} - 1)dx &= a_{-}\theta^{\alpha_{-}} \int_{-1}^{-M\theta} \frac{1 + g(y/\theta)}{y^{\alpha_{-}+1}} (e^{iy} - 1)dy = \\ &= -a_{-} \left(\theta^{\alpha_{-}} \int_{-1}^0 \frac{e^{iy} - 1}{y^{\alpha_{-}+1}} dy + \theta^{\alpha_{-}} \int_{-1}^{-M\theta} \frac{g(y/\theta)}{y^{\alpha_{-}+1}} (e^{iy} - 1)dy - \theta^{\alpha_{-}} \int_{-M\theta}^0 \frac{e^{iy} - 1}{y^{\alpha_{-}+1}} dy \right). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Sia

$$\psi_M^{(3)}(\theta) = \theta^{\alpha_{-}} \int_{-1}^{-M\theta} \frac{g(y/\theta)}{y^{\alpha_{-}+1}} (e^{iy} - 1)dy,$$

allora, come prima possiamo dire che

$$|\psi_M^{(3)}(\theta)| \leq \epsilon \theta^{\alpha_{-}}.$$

Quindi, in definitiva, considerando che

$$\phi_{-}(\theta) = I_1(\theta) + I_2(\theta) + I_3(\theta) + I_4(\theta) + I_5(\theta),$$

possiamo concludere che $\forall \epsilon > 0$, $\exists \bar{\theta} = \bar{\theta}(\epsilon)$, tale che $\forall \theta < \bar{\theta}$, vale

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\theta^{\alpha_{-}}} |\phi_{-}(\theta) - ia_{-}\theta^{\alpha_{-}} \left(-\frac{1}{i} \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{iy}}{|y|^{\alpha_{-}+1}} dy + \frac{1}{i} \int_1^{+\infty} \frac{e^{iy}}{y^{\alpha_{-}+1}} dy + \right. \\ &\quad \left. \int_0^1 \frac{e^{iy} - 1}{y^{\alpha_{-}+1}} dy - \int_{-1}^0 \frac{e^{iy} - 1}{|y|^{\alpha_{-}+1}} dy \right)| = \\ &= \frac{1}{\theta^{\alpha_{-}}} \left| \phi_{-}(\theta) - ia_{-}\theta^{\alpha_{-}} \left(\int_1^{\infty} \frac{2 \sin y}{y^{\alpha_{-}+1}} dy + \int_0^1 \frac{e^{iy} - 1}{y^{\alpha_{-}+1}} dy - \int_{-1}^0 \frac{e^{iy} - 1}{y^{\alpha_{-}+1}} dy \right) \right| = \\ &= \frac{|\psi_M^{(1)}(\theta)|}{\theta^{\alpha_{-}}} + \frac{|\psi_M^{(2)}(\theta)|}{\theta^{\alpha_{-}}} + \frac{|\psi_M^{(3)}(\theta)|}{\theta^{\alpha_{-}}} + o(1) \leq 4\epsilon. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Sia

$$a_{-} \left(\int_1^{+\infty} \frac{2 \sin y}{y^{\alpha_{-}+1}} dy + \int_0^1 \frac{e^{iy} - 1}{y^{\alpha_{-}+1}} dy - \int_{-1}^0 \frac{e^{iy} - 1}{y^{\alpha_{-}+1}} dy \right) = C_{-}, \quad (4.28)$$

allora, per la (4.27), vale

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \left| \frac{\phi_-(\theta) - iC_- \theta^{\alpha_-}}{\theta^{\alpha_-}} \right| = 0$$

ovvero

$$\phi_-(\theta) = iC_- \theta^{\alpha_-} + o(\theta^{\alpha_-}).$$

□

Ora possiamo riassumere i risultati ottenuti nei lemmi 4.1, 4.2 e 4.3, nel seguente lemma, ricordando che abbiamo definito $\alpha_+ = \alpha$:

Lemma 4.4. 1. Se $\alpha_+ < \alpha_-$, allora

$$\phi(\theta) = e^{i\mu\theta}(1 - C_+^\mu |\theta|^\alpha + o(\theta^\alpha)) \quad \theta \rightarrow 0^\pm,$$

dove $\mu = E(\xi_1)$, per $\alpha_+ \in (1, 2)$ e $\mu = 0$ per $\alpha_+ \in (0, 1]$ (in questo caso $C_+^0 := C_+$).

2. Se $\alpha_+ = \alpha_-$, allora (escludendo il caso $\alpha = 1$)

$$\phi(\theta) = e^{i\mu\theta}(1 - C_+^\mu |\theta|^\alpha \pm iC_-^\mu |\theta|^\alpha + o(\theta^\alpha)) \quad \text{per } \theta \rightarrow 0^\pm$$

dove $\mu = E(\xi_1)$, per $\alpha \in (1, 2)$ e $\mu = 0$ per $\alpha \in (0, 1)$ (in questo caso $C_+^0 := C_+$ e $C_-^0 := C_0$).

Grazie a questi lemmi siamo ora in grado di dimostrare il teorema (4.2).

Dimostrazione. Teorema (4.2)

La funzione caratteristica di $\eta_n = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n - n\mu}{n^{1/\alpha}}$ ha la seguente forma

$$\begin{aligned} \phi_{\eta_n}(\theta) &= \left(e^{i\mu \frac{\theta}{n^{1/\alpha}}} \bar{\phi}\left(\frac{\theta}{n^{1/\alpha}}\right) \right)^n e^{-in\mu \frac{\theta}{n^{1/\alpha}}} = \\ &= e^{in\mu \frac{\theta}{n^{1/\alpha}}} \bar{\phi}\left(\frac{\theta}{n^{1/\alpha}}\right)^n e^{-in\mu \frac{\theta}{n^{1/\alpha}}} = \left(\bar{\phi}\left(\frac{\theta}{n^{1/\alpha}}\right) \right)^n, \end{aligned}$$

dove

$$\bar{\phi}\left(\frac{\theta}{n^{1/\alpha}}\right) = 1 - C_+^\mu \left(\frac{|\theta|}{n^{1/\alpha}}\right)^\alpha + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

quando $\alpha_+ < \alpha_-$, e

$$\bar{\phi}\left(\frac{\theta}{n^{1/\alpha}}\right) = 1 - C_+^\mu \left(\frac{|\theta|}{n^{1/\alpha}}\right)^\alpha \pm iC_-^\mu \left(\frac{|\theta|}{n^{1/\alpha}}\right)^\alpha + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

quando $\alpha_+ = \alpha_-$ (escludendo il caso $\alpha = 1$).

Quindi, in conclusione, considerando i casi del lemma precedente, possiamo dire:

1. Se $\alpha_+ < \alpha_-$, allora per $n \rightarrow \infty$ e θ fissato si ha

$$\left(\bar{\phi}\left(\frac{\theta}{n^{1/\alpha}}\right)\right)^n = \left(1 - C_+^\mu \left(\frac{|\theta|}{n^{1/\alpha}}\right)^\alpha + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \rightarrow e^{C_+^\mu |\theta|^\alpha},$$

dove $\mu = E(\xi_1)$, per $\alpha_+ \in (1, 2)$ e $\mu = 0$ per $\alpha_+ \in (0, 1]$ (in questo caso $C_+^0 := C_+$).

2. Se $\alpha_+ = \alpha_-$ (caso $\alpha = 1$ escluso), allora per $n \rightarrow \infty$, e per $\theta > 0$ fissato, si ha

$$\left(\bar{\phi}\left(\frac{\theta}{n^{1/\alpha}}\right)\right)^n = \left(1 - C_+^\mu \left(\frac{\theta}{n^{1/\alpha}}\right)^\alpha + iC_-^\mu \left(\frac{\theta}{n^{1/\alpha}}\right)^\alpha + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \rightarrow e^{-(C_+^\mu - iC_-^\mu)\theta^\alpha},$$

e per $\theta < 0$

$$\left(\bar{\phi}\left(\frac{\theta}{n^{1/\alpha}}\right)\right)^n = \left(1 - C_+^\mu \left(\frac{|\theta|}{n^{1/\alpha}}\right)^\alpha - iC_-^\mu \left(\frac{|\theta|}{n^{1/\alpha}}\right)^\alpha + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \rightarrow e^{-(C_+^\mu + iC_-^\mu)|\theta|^\alpha},$$

dove, in entrambi i casi $\theta > 0$ e $\theta < 0$, $\mu = E(\xi_1)$, per $\alpha \in (1, 2)$ e $\mu = 0$ per $\alpha_+ \in (0, 1)$ (in questo caso $C_+^0 := C_+$ e $C_-^0 := C_-$).

La funzione $e^{-(C_+^\mu \mp iC_-^\mu)|\theta|^\alpha}$ per $\theta > 0$ e $\theta < 0$ rispettivamente, e con $C_- = 0$ nel caso $\alpha_+ < \alpha_-$, è la funzione caratteristica di qualche distribuzione che è appunto la distribuzione limite della nostra somma normalizzata (4.33). E'

noto infatti che se si ha una successione di funzioni caratteristiche $\phi_n(\theta)$ di misure di probabilità P_n , che converge ad una funzione continua $\phi(\theta)$, allora la successione di misure di probabilità P_n converge debolmente alla misura di probabilità P , di cui $\phi(\theta)$ è la funzione caratteristica.

□

Osservazione 4.5. La funzione caratteristica (della distribuzione limite della somma normalizzata (4.33)) trovata, è la funzione caratteristica di una distribuzione stabile.

.

Torniamo ora a considerare variabili aleatorie a valori interi, e dimostriamo quindi l'equivalente del teorema 4.2 per distribuzioni discrete.

Sia quindi data una successione di variabili aleatorie i.i.d., ξ_1, ξ_2, \dots a valori interi, con varianza infinita, e sia $p(x)$ la loro funzione di probabilità su \mathbb{Z} .

Definiamo $p(x)$ come somma della sua parte pari $p_+(x)$ e della sua parte dispari $p_-(x)$:

$$p(x) = p_+(x) + p_-(x) = \frac{p(x) + p(-x)}{2} + \frac{p(x) - p(-x)}{2}$$

Facciamo, come nel caso continuo, le seguenti ipotesi.

Per $x \rightarrow +\infty$

$$p_{\pm}(x) \sim \frac{a_{\pm}}{x^{\alpha_{\pm}+1}}, \quad (4.29)$$

dove $a_+ > 0$, $a_- \neq 0$ e $\alpha \in (0, 2)$. Questo vuol dire che esistono due costanti $M_{\pm} \in \mathbb{Z}^+$, (senza perdere di generalità possiamo considerare $M := \max\{M_+, M_-\}$) tali che, $\forall x \geq M$,

$$p_{\pm}(x) = \frac{a_{\pm}}{x^{\alpha_{\pm}+1}}(1 + g_{\pm}(x)), \quad (4.30)$$

dove $g_{\pm}(x)$ è limitata e $g_{\pm}(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$.

Per $x \rightarrow -\infty$, invece si ha

$$p_{\pm}(x) \sim \pm \frac{a_{\pm}}{|x|^{\alpha_{\pm}+1}}, \quad (4.31)$$

ovvero per $x \leq -M$ si ha

$$p_{\pm}(x) = \pm \frac{a_{\pm}}{|x|^{\alpha_{\pm}+1}}(1 + g_{\pm}(x)), \quad (4.32)$$

dove, come prima, $g_{\pm}(x)$ è limitata e $g_{\pm}(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow -\infty$.

Definiamo $\alpha_+ = \alpha$ per le stesse motivazioni date nell'osservazione (4.3).

Definiamo ora le serie di Fourier di $p_+(x)$ e $p_-(x)$, ovvero le loro funzioni caratteristiche:

$$\phi_{\pm}(\theta) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} p_{\pm}(x) dx.$$

Quindi, essendo $\phi(\theta)$ la funzione caratteristica di $p(x)$, per linearità si ha:

$$\phi(\theta) = \phi_+(\theta) + \phi_-(\theta).$$

Osservazione 4.6.

$$\theta \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

Indifferentemente consideriamo $\phi_{\pm}(\theta)$ definite o su \mathbb{T} o funzioni 2π -periodiche di θ .

Consideriamo ora la somma normalizzata

$$\eta_n = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n - A_n}{B_n}, \quad (4.33)$$

con $B_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$ e $A_n = n\mu$, dove

1. Se $\alpha_+ < \alpha_-$

$$\mu = \begin{cases} E(\xi_1) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} xp(x) & \text{per } \alpha \in (1, 2) \\ 0, & \text{per } \alpha \in (0, 1] \end{cases}$$

2. Se $\alpha_+ = \alpha_-$

$$\mu = \begin{cases} E(\xi_1) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} xp(x), & \text{per } \alpha \in (1, 2) \\ 0, & \text{per } \alpha \in (0, 1) \end{cases}$$

Teorema 4.3. *Per $n \rightarrow \infty$, la distribuzione di η_n converge debolmente alla distribuzione limite la cui funzione caratteristica è $\Phi(\theta) = e^{-C\theta^\alpha}$, per $\theta > 0$ e $\Phi(\theta) = e^{-\bar{C}|\theta|^\alpha}$, per $\theta < 0$, dove C è una costante che dipende da a_+ , da a_- e α e \bar{C} è il suo complesso coniugato.*

Riportiamo gli enunciati dei lemmi usati per dimostrare l'equivalente del teorema 4.3 nel caso continuo, validi anche nel caso discreto. Data comunque l'analogia delle dimostrazioni nel caso discreto con quelle già date nel caso continuo, ci occupiamo di riportare solo la dimostrazione del lemma 4.6.

Lemma 4.5. Sia $\alpha \in (0, 2)$, allora per $\theta \rightarrow 0^+$

$$\phi_+(\theta) = 1 - C_+\theta^\alpha + o(\theta^\alpha), \quad (4.34)$$

dove $C_+ = C_+(a_+, \alpha) > 0$.

Lemma 4.6. Assumiamo $\alpha_- \in (1, 2)$ e $\mu = 0$ ⁴, allora per $\theta \rightarrow 0^+$

$$\phi_-(\theta) = iC_-\theta^{\alpha_-} + o(\theta^{\alpha_-}),$$

dove $C_- = C_-(a_-, \alpha_-)$.

Lemma 4.7. Assumiamo $\alpha_- \in (0, 1)$, allora per $\theta \rightarrow 0^+$

$$\phi_-(\theta) = iC_-\theta^{\alpha_-} + o(\theta^{\alpha_-}), \quad (4.35)$$

dove $C_- = C_-(a_-, \alpha_-)$.

⁴Per il caso di variabili in cui $\mu \neq 0$, si usa il Corollario 4.1.

Dimostrazione. Lemma 4.6. Consideriamo $p_-(x)$ come in (4.30) e (4.32). Sia $N = [1/\theta]$, cioè la parte intera di $1/\theta$, prendiamo θ in modo tale che sia $N > M$, e spezziamo la sommatoria che identifica $\phi_-(\theta)$ in cinque parti:

$$\begin{aligned}\phi_-(\theta) &= \sum_{x=-\infty}^{-N} p_-(x)e^{i\theta x} + \sum_{x=-N+1}^{-M-1} p_-(x)e^{i\theta x} + \\ &\quad \sum_{x=-M}^M p_-(x)e^{i\theta x} + \sum_{x=M+1}^{N-1} p_-(x)e^{i\theta x} + \sum_{x=N}^{\infty} p_-(x)e^{i\theta x} \\ &= S_1(\theta) + S_2(\theta) + S_3(\theta) + S_4(\theta) + S_5(\theta).\end{aligned}\tag{4.36}$$

Consideriamo $S_3(\theta)$ che è un polinomio in $e^{i\theta}$, per cui, come funzione periodica definita su \mathbb{R} , vale

$$S_3(0) = \sum_{x=-M}^M p_-(x),\tag{4.37}$$

$$S'_3(0) = i\theta \sum_{x=-M}^M p_-(x)x.\tag{4.38}$$

Poichè $p_-(x)$ è una funzione dispari, sarà $S_3(0) = 0$ e quindi

$$S_3(\theta) = i\theta \sum_{x=-M}^M p_-(x)x + O(\theta^2) \quad \text{per } \theta \rightarrow 0.\tag{4.39}$$

Per $S_5(\theta)$ si ha

$$S_5(\theta) = \sum_{x=N}^{\infty} p_-(x)e^{i\theta x} = \sum_{x=N}^{\infty} \frac{a_-(1+g(x))}{x^{\alpha_-+1}} e^{i\theta x} = a_- \int_{[1/\theta]}^{\infty} \frac{(1+g([z]))e^{i\theta[z]}}{[z]^{\alpha_-+1}} dz.$$

Ora

$$\int_{[1/\theta]}^{\infty} \frac{(1 + g([z]))e^{i\theta[z]}}{[z]^{\alpha_-+1}} dz = \int_{1/\theta}^{\infty} \frac{(1 + g([z]))e^{i\theta[z]}}{[z]^{\alpha_-+1}} dz + \int_{[1/\theta]}^{1/\theta} \frac{(1 + g([z]))e^{i\theta[z]}}{[z]^{\alpha_-+1}} dz,$$

ma

$$\int_{[1/\theta]}^{1/\theta} \frac{(1 + g([z]))e^{i\theta[z]}}{[z]^{\alpha_-+1}} dz \leq \frac{K}{[1/\theta]^{\alpha_-+1}} \sim K\theta^{\alpha_-+1} = o(\theta^\alpha) \quad \text{per } \theta \rightarrow 0.$$

essendo la lunghezza dell'intervallo di integrazione minore di 1, il numeratore dell'integrando limitato e assumendo z valore in $[1/\theta]$. Allora possiamo dire che

$$\int_{[1/\theta]}^{\infty} \frac{(1 + g([z]))e^{i\theta[z]}}{[z]^{\alpha_-+1}} dz \sim \int_{1/\theta}^{\infty} \frac{(1 + g([z]))e^{i\theta[z]}}{[z]^{\alpha_-+1}} dz$$

Facendo il cambiamento di variabili $z = y/\theta$, si ha

$$a_- \int_{1/\theta}^{\infty} \frac{(1 + g([z]))e^{i\theta[z]}}{[z]^{\alpha_-+1}} dz = a_- \theta^{\alpha_-} \int_1^{\infty} \frac{(1 + g([y/\theta]))e^{i\theta[y/\theta]}}{([y/\theta]\theta)^{\alpha_-+1}} dy.$$

Si vede che

$$\frac{(1 + g([y/\theta]))e^{i\theta[y/\theta]}}{([y/\theta]\theta)^{\alpha_-+1}} \longrightarrow \frac{e^{iy}}{y^{\alpha_-+1}} \quad \text{puntualmente per } \theta \rightarrow 0;$$

essendo inoltre $g([y/\theta]) \leq \max_{y \in [1, \infty]} < \epsilon$ e $|e^{i\theta[y/\theta]}|/[y/\theta]\theta)^{\alpha_-+1} \leq 1/by^{\alpha_-+1}$, con b costante compresa tra 0 e 1, possiamo usare la convergenza dominata e scrivere

$$\begin{aligned} a_- \theta^{\alpha_-} \int_1^{\infty} \frac{(1 + g([y/\theta]))e^{i\theta[y/\theta]}}{([y/\theta]\theta)^{\alpha_-+1}} dy = \\ a_- \theta^{\alpha_-} \left(\int_1^{\infty} \frac{e^{iy}}{y^{\alpha_-+1}} dy + o(1) \right) \sim a_- \theta^{\alpha_-} \int_1^{\infty} \frac{e^{iy}}{y^{\alpha_-+1}} dy. \end{aligned}$$

Quindi in definitiva

$$S_5(\theta) \sim a_- \theta^{\alpha_-} \int_1^\infty \frac{e^{iy}}{y^{\alpha+1}} dy, \quad \text{in un intorno destro di } \theta = 0.$$

Similmente per S_1

$$S_1(\theta) = \sum_{x=-\infty}^{-N} p_-(x) e^{i\theta x} \sim -a_- \theta^{\alpha_-} \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{iy}}{|y|^{\alpha+1}} dy, \quad \text{in un intorno destro di } \theta = 0.$$

Ora

$$\begin{aligned} S_2(\theta) + S_4(\theta) &= \sum_{x=-N+1}^{-M-1} p_-(x) (e^{i\theta x} - 1 - i\theta x) + \sum_{x=M+1}^{N-1} p_-(x) (e^{i\theta x} - 1 - i\theta x) + \\ &\quad + \sum_{x=-N+1}^{-M-1} p_-(x) i\theta x + \sum_{x=M+1}^{N-1} p_-(x) i\theta x. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Si noti che, data la disparità di $p_-(x)$, $\sum_{x=-N+1}^{-M-1} p_-(x)$ si annulla con $\sum_{x=M+1}^{N-1} p_-(x)$. Consideriamo le ultime due somme di (4.40)

$$\begin{aligned} &\sum_{x=-N+1}^{-M-1} p_-(x) i\theta x + \sum_{x=M+1}^{N-1} p_-(x) i\theta x = \\ &i\theta \sum_{x=-N+1}^{N-1} p_-(x) x - i\theta \sum_{x=-M}^M p_-(x) x. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Ora

$$i\theta \sum_{x=-N+1}^{N-1} p_-(x) x = i\theta \sum_{x=-\infty}^{\infty} p_-(x) x - i\theta \sum_{x=-\infty}^{-N} p_-(x) x - i\theta \sum_{x=N}^{\infty} p_-(x) x =$$

$$H_1 - H_2 - H_3 = H_1 - 2H_3,$$

data la parità della funzione $p_-(x)x$. Per l'ipotesi fatta, cioè $\mu = 0$, $H_1 = 0$. Consideriamo H_3 , con ragionamenti analoghi a quelli fatti per $S_1(\theta)$ e

$S_5(\theta)$, utilizzando il cambio di variabile $z = y/\theta$ e la convergenza dominata, possiamo dire che

$$H_3 = i\theta \sum_{x=N}^{\infty} p(x)x \sim a_- i\theta \int_{1/\theta}^{\infty} \frac{1+g([z])}{[z]^{\alpha_-+1}} [z] dz \sim ia_- \theta^{\alpha_-} \int_1^{\infty} \frac{1}{y^{\alpha_-}} dy,$$

che vale in un intorno destro di $\theta = 0$.

L'ultima somma di (4.41) si annulla con il termine del primo ordine dello sviluppo di $S_3(\theta)$ in (4.37). Occupiamoci ora delle prime due somme del membro di destra di (4.40). Consideriamo il secondo di questi, allora

$$\begin{aligned} & \sum_{x=M+1}^{N-1} p_-(x)(e^{i\theta x} - 1 - i\theta x) = \\ & a_- \sum_{x=M+1}^{N-1} \frac{e^{i\theta x} - 1 - i\theta x}{x^{\alpha_-+1}} + a_- \sum_{x=M+1}^{N-1} \frac{g(x)}{x^{\alpha_-+1}} (e^{i\theta x} - 1 - i\theta x). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Ora

$$a_- \sum_{x=M+1}^{N-1} \frac{e^{i\theta x} - 1 - i\theta x}{x^{\alpha_-+1}} = a_- \int_{M+1}^{[1/\theta]-1} \frac{e^{i\theta[z]-1-i\theta[z]}}{[z]^{\alpha_-+1}} dz,$$

e

$$\int_{M+1}^{[1/\theta]-1} \frac{e^{i\theta[z]-1-i\theta[z]}}{[z]^{\alpha_-+1}} dz = \int_{M+1}^{1/\theta} \frac{e^{i\theta[z]-1-i\theta[z]}}{[z]^{\alpha_-+1}} dz - \int_{[1/\theta]-1}^{1/\theta} \frac{e^{i\theta[z]-1-i\theta[z]}}{[z]^{\alpha_-+1}} dz,$$

ma

$$\int_{[1/\theta]-1}^{1/\theta} \frac{e^{i\theta[z]-1-i\theta[z]}}{[z]^{\alpha_-+1}} dz \leq \frac{2K}{[1/\theta]^{\alpha_-+1}} \sim K\theta^{\alpha_-+1} = o(\theta^{\alpha_-}).$$

Quindi possiamo dire che

$$\int_{M+1}^{[1/\theta]-1} \frac{e^{i\theta[z]-1-i\theta[z]}}{[z]^{\alpha_-+1}} dz \sim \int_{M+1}^{1/\theta} \frac{e^{i\theta[z]-1-i\theta[z]}}{[z]^{\alpha_-+1}} dz \quad (4.43)$$

Facendo il cambio di variabile $z = y/\theta$, si ha che

$$a_- \int_{M+1}^{1/\theta} \frac{e^{i\theta[z]-1-i\theta[z]}}{z^{\alpha_-+1}} dz = a_- \theta^{\alpha_-} \int_{(M+1)\theta}^1 \frac{e^{i\theta[y/\theta]-1-i\theta[y/\theta]}}{([y/\theta]\theta)^{\alpha_-+1}} dy =$$

$$a_- \theta^{\alpha_-} \left(\int_0^1 \frac{e^{i\theta[y/\theta]} - 1 - i\theta[y/\theta]}{([y/\theta]\theta)^{\alpha_-+1}} dy - \int_0^{(M+1)\theta} \frac{e^{i\theta[y/\theta]} - 1 - i\theta[y/\theta]}{([y/\theta]\theta)^{\alpha_-+1}} dy \right) \quad (4.44)$$

Ora, usando la convergenza dominata, possiamo dire che

$$a_- \theta^{\alpha_-} \int_0^1 \frac{e^{i\theta[y/\theta]} - 1 - i\theta[y/\theta]}{y^{\alpha_-+1}} dy \sim a_- \theta^{\alpha_-} \int_0^1 \frac{e^{iy} - 1 - iy}{y^{\alpha_-+1}} dy$$

che è integrabile in 0, perchè in un intorno dello 0 vale

$$\frac{e^{iy} - 1 - iy}{y^{\alpha_-+1}} \sim i \frac{1}{y^{\alpha_- - 1}},$$

la cui integrazione in 0 non dà problemi, essendo $\alpha_- - 1 < 1$. Per il secondo integrale del membro di destra di (4.44), come prima si vede che è integrabile in zero, inoltre si vede facilmente che va a zero per $\theta \rightarrow 0$.

Prendiamo ora in considerazione la seconda sommatoria a destra dell'uguaglianza in (4.42)

$$a_- \sum_{x=M+1}^{N-1} \frac{g_-(x)}{x^{\alpha_-+1}} (e^{i\theta x} - 1 - i\theta x) = a_- \int_{M+1}^{[1/\theta]-1} \frac{g([z])}{[z]^{\alpha_-+1}} (e^{i\theta[z]} - 1 - i\theta[z]) dz,$$

come in (4.43) possiamo dire

$$a_- \int_{M+1}^{[1/\theta]-1} \frac{g([z])}{[z]^{\alpha_-+1}} (e^{i\theta[z]} - 1 - i\theta[z]) dz \sim a_- \int_{M+1}^{1/\theta} \frac{g([z])}{[z]^{\alpha_-+1}} (e^{i\theta[z]} - 1 - i\theta[z]) dz.$$

Facendo il cambio di variabile $z = y/\theta$, si ha che

$$a_- \int_{M+1}^{1/\theta} \frac{g([z])}{[z]^{\alpha_-+1}} (e^{i\theta[z]} - 1 - i\theta[z]) dz = a_- \theta^{\alpha_-} \int_{(M+1)\theta}^1 \frac{g([y/\theta])}{([y/\theta]\theta)^{\alpha_-+1}} (e^{i\theta[y/\theta]} - 1 - i\theta[y/\theta]) dy$$

Sia

$$\kappa_M^1(\theta) = \theta^{\alpha_-} \int_{(M+1)\theta}^1 \frac{g([y/\theta])}{([y/\theta]\theta)^{\alpha_-+1}} (e^{i\theta[y/\theta]} - 1 - i\theta[y/\theta]) dy,$$

allora, sapendo che $g(x) \rightarrow 0$ per $|x| \rightarrow \infty$, e che quindi fissato ϵ , $\exists M = M(\epsilon)$, sufficientemente grande, tale che $\max_{x \in [M, \infty]} g(x) \leq \epsilon$, possiamo dire che

$$\begin{aligned} \frac{|\kappa_M^1(\theta)|}{\theta^{\alpha_-}} &\leq \max_{z \in [M+1, 1/\theta]} g([z]) \int_{(M+1)\theta}^1 \frac{|e^{i\theta[y/\theta]} - 1 - i\theta[y/\theta]|}{([y/\theta]\theta)^{\alpha_-+1}} dy \leq \\ &\max_{[M+1, \infty]} g([z]) \int_0^1 \frac{|e^{iy} - 1 - iy|}{y^{\alpha_-+1}} dy. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Ora, come fatto in precedenza, possiamo applicare la convergenza dominata all'integrale in (4.45), si ha allora

$$\int_0^1 \frac{|e^{i\theta[y/\theta]} - 1 - i\theta[y/\theta]|}{([y/\theta]\theta)^{\alpha_-+1}} dy \sim \int_0^1 \frac{|e^{iy} - 1 - iy|}{y^{\alpha_-+1}} dy, \quad \text{in un intorno di } \theta = 0^+.$$

Per cui possiamo dire che

$$\frac{|\kappa_M^1(\theta)|}{\theta^{\alpha_-}} \leq \max_{[M+1, \infty]} g([z]) \int_0^1 \frac{|e^{iy} - 1 - iy|}{y^{\alpha_-+1}} dy \leq \max_{[M+1, \infty]} g([z]) \int_0^1 \frac{Ky^2}{y^{\alpha_-+1}} dy,$$

dove abbiamo usato il fatto che $|e^{iy} - 1 - iy| \leq Ky^2$, per $y \in [0, 1]$. Ora, eventualmente scegliendo un M più grande, possiamo supporre che

$$\max_{x \in [M+1, \infty]} g([z]) \leq \frac{\epsilon}{K \int_0^1 y^{-(\alpha_-+1)} dy},$$

da cui

$$|\kappa_M^1(\theta)| \leq \epsilon \theta^{\alpha_-}$$

Gli stessi ragionamenti possiamo farli per la prima somma di (4.40).

In definitiva, prendendo in considerazione il comportamento asintotico di ogni termine, e considerando che

$$\phi_-(\theta) = S_1(\theta) + S_2(\theta) + S_3(\theta) + S_4(\theta) + S_5(\theta)$$

si ha che $\forall \epsilon > 0$, $\exists \bar{\theta} = \bar{\theta}(\epsilon)$, tale che $\forall \theta < \bar{\theta}$, vale

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\theta^{\alpha_-}} |\phi_-(\theta) - i\theta^{\alpha_-} (-\frac{1}{i}a_- \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{iy}}{|y|^{\alpha_-+1}} dy + \frac{1}{i}a_- \int_1^{+\infty} \frac{e^{iy}}{y^{\alpha_-+1}} dy - \\
& -2a_- \int_1^{\infty} \frac{1}{y^{\alpha_-}} dy + \int_0^1 \frac{e^{iy} - 1 - iy}{y^{\alpha_-+1}} dy - \int_{-1}^0 \frac{e^{iy} - 1 - iy}{|y|^{\alpha_-+1}} dy) | = \\
& \frac{1}{\theta^{\alpha_-}} |\phi_-(\theta) - i\theta^{\alpha_-} (a_- \int_1^{\infty} \frac{2 \sin y}{y^{\alpha_-+1}} dy - 2a_- \int_1^{\infty} \frac{1}{y^{\alpha_-}} dy + \\
& \int_0^1 \frac{e^{iy} - 1 - iy}{y^{\alpha_-+1}} dy - \int_{-1}^0 \frac{e^{iy} - 1 - iy}{|y|^{\alpha_-+1}} dy) | = \\
& \frac{|\kappa_M^{(1)}(\theta)|}{\theta^{\alpha_-}} + \frac{|\kappa_M^{(2)}(\theta)|}{\theta^{\alpha_-}} + o(1) \leq 3\epsilon
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Sia

$$a_- \int_1^{\infty} \frac{2 \sin y}{y^{\alpha_-+1}} dy - 2a_- \int_1^{\infty} \frac{1}{y^{\alpha_-}} dy + \int_0^1 \frac{e^{iy} - 1 - iy}{y^{\alpha_-+1}} dy - \int_{-1}^0 \frac{e^{iy} - 1 - iy}{|y|^{\alpha_-+1}} dy = C_-, \tag{4.47}$$

allora, per la (4.46) e la (4.47), vale

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \left| \frac{\phi_-(\theta) - iC_- \theta^{\alpha_-}}{\theta^{\alpha_-}} \right| = 0$$

ovvero

$$\phi_-(\theta) = iC_- \theta^{\alpha_-} + o(\theta^{\alpha_-}).$$

□

Ora, considerando i risultati del lemma 4.4, possiamo dimostrare il teorema 4.3.

Dimostrazione. Teorema (4.3)

La funzione caratteristica di $\eta_n = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n - n\mu}{n^{1/\alpha}}$ ha la seguente forma

$$\phi_{\eta_n}(\theta) = \left(e^{i\mu \frac{\theta}{n^{1/\alpha}}} \bar{\phi}\left(\frac{\theta}{n^{1/\alpha}}\right) \right)^n e^{-in\mu \frac{\theta}{n^{1/\alpha}}} =$$

$$= e^{in\mu \frac{\theta}{n^{1/\alpha}}} \bar{\phi}\left(\frac{\theta}{n^{1/\alpha}}\right)^n e^{-in\mu \frac{\theta}{n^{1/\alpha}}} = \bar{\phi}\left(\frac{\theta}{n^{1/\alpha}}\right)^n,$$

dove

$$\bar{\phi}\left(\frac{\theta}{n^{1/\alpha}}\right) = 1 - C_+^\mu \left(\frac{|\theta|}{n^{1/\alpha}}\right)^\alpha + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

quando $\alpha_+ < \alpha_-$, e

$$\bar{\phi}\left(\frac{\theta}{n^{1/\alpha}}\right) = 1 - C_+^\mu \left(\frac{|\theta|}{n^{1/\alpha}}\right)^\alpha \pm iC_-^\mu \left(\frac{|\theta|}{n^{1/\alpha}}\right)^\alpha + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

quando $\alpha_+ = \alpha_-$ (escludendo il caso $\alpha = 1$).

Quindi in conclusione possiamo dire:

1. Se $\alpha_+ < \alpha_-$, allora per $n \rightarrow \infty$ e θ fissato si ha

$$\left(\bar{\phi}\left(\frac{\theta}{n^{1/\alpha}}\right)\right)^n = \left(1 - C_+^\mu \left(\frac{|\theta|}{n^{1/\alpha}}\right)^\alpha + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \rightarrow e^{C_+^\mu |\theta|^\alpha},$$

dove $\mu = E(\xi_1)$, per $\alpha_+ \in (1, 2)$ e $\mu = 0$ per $\alpha_+ \in (0, 1]$ (in questo caso $C_+^0 := C_+$).

2. Se $\alpha_+ = \alpha_-$ (caso $\alpha = 1$ escluso), allora per $n \rightarrow \infty$, e per $\theta > 0$ fissato, si ha

$$\left(\bar{\phi}\left(\frac{\theta}{n^{1/\alpha}}\right)\right)^n = \left(1 - C_+^\mu \left(\frac{\theta}{n^{1/\alpha}}\right)^\alpha + iC_-^\mu \left(\frac{\theta}{n^{1/\alpha}}\right)^\alpha + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \rightarrow e^{-(C_+^\mu - iC_-^\mu)\theta^\alpha},$$

e per $\theta < 0$

$$\left(\bar{\phi}\left(\frac{\theta}{n^{1/\alpha}}\right)\right)^n = \left(1 - C_+^\mu \left(\frac{|\theta|}{n^{1/\alpha}}\right)^\alpha - iC_-^\mu \left(\frac{|\theta|}{n^{1/\alpha}}\right)^\alpha + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \rightarrow e^{-(C_+^\mu + iC_-^\mu)|\theta|^\alpha},$$

dove, in entrambi i casi $\theta > 0$ e $\theta < 0$, $\mu = E(\xi_1)$, per $\alpha \in (1, 2)$ e $\mu = 0$ per $\alpha_+ \in (0, 1)$ (in questo caso $C_+^0 := C_+$ e $C_-^0 := C_-$).

□

Appendice A

Cenni di teoria della misura

Definizione A.1. Uno *spazio di probabilità* è la terna (Ω, \mathcal{F}, P) dove

- (a) Ω è uno spazio arbitrario (collezione di ‘punti’ $\omega \in \Omega$);
- (b) \mathcal{F} è la cosiddetta σ -algebra, cioè una famiglia non vuota di sottoinsiemi di Ω tale che:
 - $\Omega \in \mathcal{F}$,
 - $A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$,
 - $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C \in \mathcal{F}$,
 - Sia $(A_n) \in \mathcal{F}$ con $n \in \mathbb{N}$ allora $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.
- (c) P è una funzione non negativa, definita su \mathcal{F} , con le seguenti proprietà
 - $P[\Omega] = 1$,
 - , Per ogni successione $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di insiemi di \mathcal{F} a due a due disgiunti, $\sum_{n=1}^{\infty} P[A_n] = P[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n]$. Ovvero P è una *misura di probabilità numerabilmente additiva*.

Vediamo di seguito alcune nozioni e teoremi applicabili ad uno spazio di probabilità qualsiasi:

- (1) Sia $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione monotona di insiemi di \mathcal{F} , $A_k \supset A_{k+1}$ $\forall k \geq 1$, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\bigcap_{k=1}^n A_k \right] = P \left[\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \right] \quad (\text{A.1})$$

- (2) Siano (Ω, \mathcal{F}) e $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ due *spazi misurabili* (spazio + σ -algebra), con \mathcal{B} σ -algebra boreliana¹

Una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è detta *misurabile* se $\forall B \in \mathcal{B} \Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile è detta *variabile aleatoria*.

Una funzione misurabile è detta *semplice* se assume solo un numero finito di valori distinti.

Diciamo che una successione di funzioni misurabili $f_n(\omega)$ *converge quasi dappertutto* (o *con probabilità uno*) se $[\omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) \text{ esiste}]$ è un insieme di misura uno. Una funzione semplice può essere rappresentata q.d. come il limite di una successione di funzioni semplici. E se una successione di funzioni misurabili converge q.d., allora il suo limite è anch'esso misurabile.

- (3) Se $\varphi(\omega)$ è una funzione semplice, che assume valori finiti a_k sugli insiemi $A_k \in \mathcal{F}$, $k = 1, \dots, n$, il suo integrale è definito come

$$\int_{\Omega} \varphi(\omega) dP(\omega) = \sum_{k=1}^n a_k P[A_k].$$

Un'arbitraria funzione misurabile $f(\omega)$ è detta *integrabile* se

$$\sup_{\varphi} \int_{\Omega} |\varphi(\omega)| dP(\omega) < \infty,$$

dove l'estremo superiore è preso tra tutte le funzioni semplici tali che valga q.d. $|\varphi(\omega)| \leq |f(\omega)|$. Se $f(\omega)$ è integrabile, allora

¹Consideriamo l'insieme dei numeri reali (o, più in generale, \mathbb{R}^n) con la topologia euclidea \mathcal{T} (ossia famiglia di sottinsiemi aperti di \mathbb{R}^n). La σ -algebra boreliana \mathcal{B} è la σ -algebra generata da \mathcal{T} , gli elementi di \mathcal{B} sono detti *boreliani*.

$$\int_{\Omega} f(\omega) dP(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi_n(\omega) dP(\omega)$$

esiste e ha lo stesso valore per ogni successione $\varphi_n(\omega)$ di funzioni semplici tali che $|\varphi_n(\omega)| \leq |f(\omega)|$ e $\varphi_n(\omega)$ converge a $f(\omega)$ quasi dappertutto.

- (4) Le usuali proprietà dell'integrale di Lebesgue su un intervallo finito, come anche il teorema della convergenza dominata, si applicano all'integrale definito in (3).

Di seguito riportiamo un caso speciale di teorema di Fubini, definendo innanzitutto il concetto di indipendenza di due funzioni integrabili. Due funzioni integrabili $f(\omega)$ e $g(\omega)$ sono dette *indipendenti* se

$$P[\omega | f(\omega) \leq a, g(\omega) \leq b] = P[\omega | f(\omega) \leq a] P[\omega | g(\omega) \leq b]$$

per tutti i numeri reali a e b . In questo caso, allora vale

$$\int_{\Omega} f(\omega) g(\omega) dP(\omega) = \int_{\Omega} f(\omega) dP(\omega) \int_{\Omega} g(\omega) dP(\omega).$$

Bibliografia

- [1] Frank Spitzer, *Principles of Random Walk*, 2a edizione, Springer, New York, 1976
- [2] Leonid B. Korolov, Yakov G. Sinai, *Theory of Probability and Random process*, Springer, 2a edizione 2007
- [3] Barry D. Hughes, *Random Walks and Random Environments*, Clarendon Press, New York, 1995
- [4] B. V. Gnedenko, A. N. Kolmogorov, *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*, Addison-Wesley Publishing Company, Traduzione dal russo di K.L Chung
- [5] Jean Philippe Bouchaud, Antoine Georges, *Anomalous diffusion in disordered media: Statistical Mechanism, Models and Physical Applications*, North Holland. 1990
- [6] John P. Nolan, *Stable Distributions. Models for Heavy Tailed Data*
- [7] Paul Lévy, *Théorie de l' Addition des Variables Aléatoires*, Gauthier-Villars Editeur, Parigi, 1937
- [8] P.R Halmos, *Finite-dimensional vector spaces*, D. Van Nostrand Co. Inc., Princeton, N.J., 1958
- [9] P.R. Halmos, *Measure theory*, D. Van Nostrand Co. Inc., Princeton, N.J., 1950

- [10] Norbert Wiener, *Generalized Harmonic Analysis and Tauberian Theorems*, First M.I.T. Press Paperback Edition, U.S.A, 1966
- [11] Walter Rudin, *Functional Analysis*, 2a edizione, McGraw-Hill, New York, 1991
- [12] Michael F. Shlesinger, Joseph Klafter, Gert Zumofen, *Above, below and beyond Brownian motion*, American Association of Physics Teachers, 1999
- [13] M.Z. Bazant, *Random Walks and Diffusion*, Lecture 12: Greg Randall, *Levy Flights* ($\sigma = \infty$), Spring, 2003

Ringraziamenti

Ringrazio innanzitutto il mio Relatore, Prof. Marco Lenci, a cui esprimo tutta la mia sincera e affettuosa gratitudine. E' stato un insegnante prezioso, da cui ho cercato di apprendere il più possibile; paziente, attento e meticoloso mi ha incoraggiata e consigliata nelle decisioni anche personali e mi ha fatto appassionare sempre più, giorno dopo giorno, al lavoro che stavo facendo.

Ringrazio naturalmente i miei genitori, senza di cui tutto ciò non sarebbe stato possibile, che mi sono stati sempre affianco sopportando i miei sbalzi d'umore e supportandomi nei momenti di difficoltà.

Ringrazio Stefano...senza troppa parole...per la sua folle e contagiosa allegria...la sua pazienza...per il suo essermi stato vicino in questo percorso...per quello che ha fatto e continuerà a fare per me...per quello che abbiamo vissuto e continueremo a vivere...

Ringrazio Paglia...naturalmente! E come non potrei farlo! E' stato un amico prezioso, su cui ho sempre potuto contare...che ha sopportato tutte le mie continue domande(!)...che mi è stato vicino e ha saputo ascoltarmi e con cui ho passato momenti di allegria e spensieratezza..

Ringrazio Monica...anche lei amica preziosissima...mio alter ego! Siamo cresciute insieme in questo percorso...mi ha sempre saputo stare a fianco...tirar su nei momenti tristi, farmi ridere e divertire...

Ringrazio Costanza...arrivata in una seconda fase della mia vita a Bologna, ma con cui ho stretto subito una sincera amicizia...supportandoci a vicenda nei momenti di difficoltà... ricorderò sempre con nostalgia le mattinate in facoltà...i pomeriggi di studio...e le pazzeserate con Stefano, Paglia, Costanza,

Nunzia, Monica,..e con chi di tanto in tanto si è aggiunto!

E poi...ringrazio Monica... la mia ex coinquilina e amica di sempre...che mi è stata particolarmente vicina in questo ultimo anno e mesi di Tesi...per tutte le ore passata in casa a parlare e discutere del mio, e del suo, passato, presente e futuro, per tutte le risate e le serate passate insieme... ringrazio Silvietta...con cui ho condiviso questi anni Bolognesi, sempre dolce e disponibile con un sorriso per tutti...

Ringrazio il mio cuginetto Mattia...anche lui con me in questi anni...lo ringrazio per la sua allegria e la sua voglia di raccontarsi e di farsi raccontare...mia cugina Sara per essere stata come una sorella per me...e poi Romolo...Ale...

E poi ringrazio per ultime, ma non per importanza le mie amiche di sempre, Valeria, Valentina, Linda, Carolina..e poi Natascia, Arianna, Barbara,..semplicemente per tutto...perchè siamo cresciute insieme...ci sono sempre state e spero ci saranno per tutta la vita! Spero di non aver dimenticato nessuno!...Ancora..Grazie...!